

第六章 光学孤立子

6.0 孤立子概论

6.1 光纤中的脉冲展宽与压缩

6.2 光纤孤子的非线性Schrödinger方程

6.3 光学孤立子在光纤中的传输特性

6.4 孤子脉冲之间的相互作用

6.0 孤子概论

1. 孤立子的研究简史

2. 孤立波与孤立子

非线性科学的三大理论：

混沌(chaos)、分形(fractal)和孤立子(soliton)

- ◆ 现代自然科学正发生着深刻的变化，非线性科学贯穿着数学、生命科学、空间科学和地球科学，成为当代科学研究重要的前沿领域。
- ◆ 孤立波与孤立子是非线性科学中的重要概念之一。孤立子起源于孤立波，它已在非线性光学、磁通量子器件、生物学、等离子体及光纤孤立子通讯等一系列高科技领域有了令人瞩目的应用。

1. 孤立子的研究简史

罗素的发现

一个奇特的水波

1834年，英国海军工程师罗素 (J. Scott Russell) 在一次偶然中观察到一种奇特的水波。

1844年，他的报告写道：“我看到两匹骏马拉着一条船沿运河迅速前进。当船突然停止时，随船一起运动的船头处的水堆并没有停止下来。它激烈地在船头翻动起来，随即突然离开船头，并以巨大的速度向前推进。一个轮廓清晰又光滑的水堆，犹如一个大鼓包，沿着运河一直向前推进在行进过程中其形状与速度没有明显变化。我骑马跟踪注视，发现它保持着起始时约30英尺长，1-1.5英尺高的浪头，约以每小时8-9英里的速度前进，后来在运河的拐弯处消失了”。

罗素称之为 **孤立波 - Solitary wave**。

孤立波的理论证实

KdV方程 (非线性: 两个独立解的线性叠加不再是其解)

半个世纪后的1895年, 荷兰科学家科特维格(Kortweg)与德弗雷斯(de Vries)研究了浅水波的运动, 在长波近似和小振动的前提下, 建立了单向运动方程(KdV), 并求出了与Russell描述一致的孤子解, 从而从理论上证明了孤立波的存在。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \longrightarrow u(x, t) = 3v \operatorname{sech}^2[(x - vt)/\sqrt{v}]$$

$\operatorname{sech}(x)$ 为双曲正割函数, 具有钟形形状。

形状稳定的孤立波——孤立子

1965年，两位美国数学家扎布斯基(Zabusky)与克鲁斯卡尔(Kruskal)，用计算机计算发现，两个孤立波在碰撞前后波形和速度保持不变，就像两个粒子之间的弹性碰撞一样，因此他们把这种孤立波称为孤立子(Soliton)。此后，人们发现，孤立子是一种普遍存在的非线性物理现象。

以后的二十多年，孤立子理论的研究蓬勃发展，研究和应用的领域包括：流体物理、基本粒子物理、等离子体物理、凝聚态物理（包含固体物理和超导物理在内）、激光物理、生物物理等。

光学中的孤立子

- 在光学领域，自感应透明是最早发现的光学孤立波现象。
 - 1973年长谷川(A. Hasegawa)和塔波特(F. Tappert)等人提出在光纤中能够形成孤立子，从而拉开光孤子(Optical Soliton)的研究序幕。
 - 1980年莫列诺(L. E. Mollenauer)等人首次在实验上观察到了光纤孤立子脉冲，并提出利用光纤光孤子进行通信的设想。
- 现在人们研究光频梳技术，其中就采用了光孤子中的一些理论方法

孤立子在大自然中普遍存在

孤立子是自然界中普遍存在的一种非线性物理现象，尺度遍布在 $10^{-9}\text{m} \sim 10^8\text{m}$ 的范围内。例如
星系中的密度波；木星的大红斑；
海洋中水波在撞击油井的时候；
分子、等离子体、磁场系统；
激光在固体中的传播；
超导约瑟夫森(Josephson)结等....

作为科学研究对象，孤立子理论存在于多个学科领域。例如流体力学、等离子体物理，非线性光学、凝聚态物理、生物物理、经典场论和量子场论等。

2. 孤立波与孤立子

孤立波与孤立子

孤立波解只存在于非线性色散方程之中，亦即**非线性与色散是孤立波存在的必要条件**。色散即波的传播速度依赖于波的频率，它导致波包散开，而非线性却导致波包压缩，两者共同作用的结果便形成稳定的波包，即孤立波(solitary wave)。当两个孤立波相互作用之后，如果保持各自的形状与速度不变，仅仅相位发生变化，我们称这类象物质粒子一样具有弹性碰撞特性的孤立波，为“孤立子”(soliton)，简称“孤子”。**孤立子是一类特殊的孤立波。**

备注

- 目前在不同的著作中，多数作者称波形分布在有限的空间范围内，且具有弹性碰撞性质，即碰撞后保持原有的速度和波形的孤立波为孤立子或孤子。而对呈非弹性碰撞的一类，仍称为孤立波。
- 从事孤立子理论研究的数学家们，多数采用以是否弹性碰撞来区分的意见。但物理学家，对孤立子的定义要宽松些，认为只要波的能量有限，且分布在有限的空间或时间范围内，即使在传播过程中波形发生变化（例如光纤中的高阶光孤立子），也都称为孤立子。

孤立波方程

- 在理论上和实验上已对孤立波作了大量的研究。
- 比较典型的，是下列非线性方程具有孤立波解。
 - (1) KdV方程
 - (2) 正弦—高登(Sine-Gordon)方程
 - (3) 户田(M.Toda)非线性晶格方程
 - (4) 非线性薛定谔方程(NLSE)

由于孤立子是一类特殊的孤立波，在这里统称为孤立波

几类典型的孤立波方程

KdV方程

$$\phi_t - 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0$$

用以描述浅水中的表面波、等离子中的电磁波以及声波、非简谐的晶格振动等。

NLS方程

$$i\phi_t + \frac{1}{2}\phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0$$

用以描述深水中的非线性波、电介质中强激光的自聚焦、超导孤立子等。

sKG方程

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi$$

用以描述晶格位错的传播、铁磁体中畴壁的运动、超导 Josephson 结、基本粒子模型等。

ϕ^4 场方程

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = -\phi + \phi^3$$

用以描述场论模型、相变模型、铁电体的相变等。

实例

- 在超导研究方面，约瑟夫逊(B. D. Josephson)效应中的磁通量子实际上就是孤立子，于是人们将孤立子的研究方法引入进来，研发耗能特别小、速度特别快的新型计算机（包括量子计算机）。
- 在生物学方面，人们发现了达维多夫(A. S. Davydov)孤立子，并探讨了生物体蛋白质中孤立子的传播问题，为弄清肌肉收缩的机制提供了有力的手段。
- 在光纤通信方面，人们发现了非线性光纤中的光孤立子（亦称光孤子）。它具有长距离传输损耗小、无需中继站、比特率（单位时间传输的信息量）高等优点。光纤孤立子通信有望成为超高速率和超长距离通信的重要手段。

孤立波方程的求解方法

给定一个非线性方程，一般情况下，没有一个通用的方法知道它是否存在孤子解，或如何来寻找孤子解。以下是应用于一些特殊系统的成功方法。

- (1) 逆散射方法
- (2) 贝克隆(Bäcklund)变换
- (3) 广田(Hirota)方法
- (4) 数值方法(可适用于不可积系统)

孤立波类型

(i) 波包型

(ii) 凹陷型

(iii) 扭结型

(iv) 反扭结型

(i)、(ii) 两种是在
 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $u(x) \rightarrow 0$

(iii)、(iv) 两种是在
 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $u(x)$ 趋
近于不同的数值

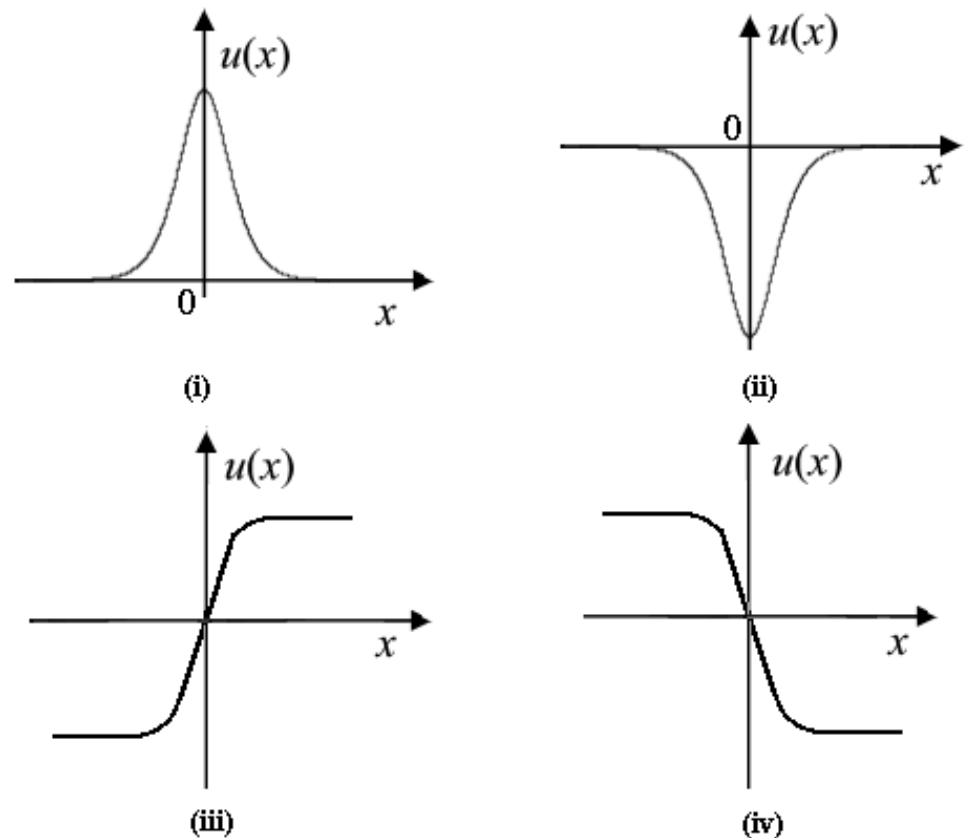


图6.0-1 四种孤立波类型

孤立子特性

孤立子作为非线性波动方程的解，它具有以下特性：

- ①是相对于介质单方向传播的行波(既可以传播，又可以相对静止)；
- ②分布在空间的一个有限区域中(即空间局域化)；
- ③波包形状不随时间而变化(由于非线性引起的波包压缩效应与由色散引起的波包展宽效应相互抵消)；
- ④两个孤立子相遇而相互作用时，具有类似粒子一样的弹性碰撞特性。

注：孤立子的波包形状，在传播过程中也可以呈周期性地变化

对孤立子的更深入研究发现，孤立子不仅像原子或分子，而且更像基本粒子，这表现在：

1. 孤立子不仅具有质量、能量和动量特征，而且还具有电荷特征。
2. 孤立子有的像光子、电子、质子那样，稳定而不衰变；有的像中子、 π 介子、 μ 子那样可以衰变，具有衰变性、不稳定性。
3. 正如基本粒子都存在其反粒子，孤立子也都存在其相应的反孤立子。
4. 对应于运动方程的种种对称性，孤立子也存在相应的守恒定律，如动量守恒、能量守恒和“粒子数”守恒等等。

BTW，历史上，人们为了理解量子力学中的“波粒二象性”，有的试图将波理解为粒子在空间中的周期性疏密分布，有的试图把粒子理解为由波形成的孤立子，这些都是不成功的。

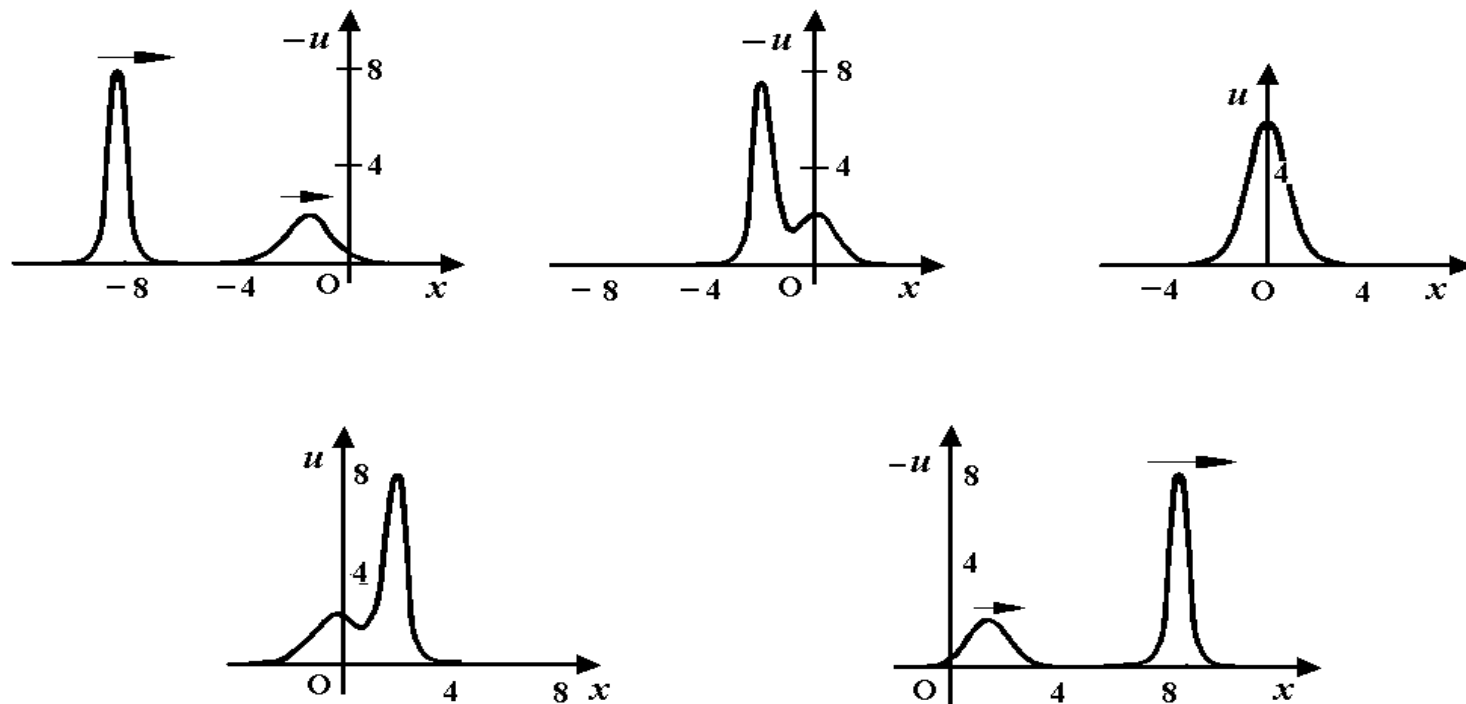


图6.0-2 两个KdV孤立子的碰撞过程

由上图可以看出：孤立子在碰撞前后保持高度不变，像是“透明地”穿过对方；碰撞时两个孤立子重叠在一起，其高度低于碰撞前孤立波高度较高的一个（这表明在非线性的过程中，不存在线性叠加原理）。

6.1 光纤中的脉冲展宽与压缩

1. 光纤中的色散与脉冲展宽(略讲, 学生复习)
2. 光纤中的非线性特性与脉冲压缩
3. 光纤孤子的形成机理

注：第一节以学生自己看为主，概念性的知识仍有可能考核到，本节“课外阅读”部分不考核

1. 光纤中的色散与脉冲展宽

对于线性光纤通信系统而言，限制其**传输容量和传播距离**的主要因素是光纤的**损耗和色散**。

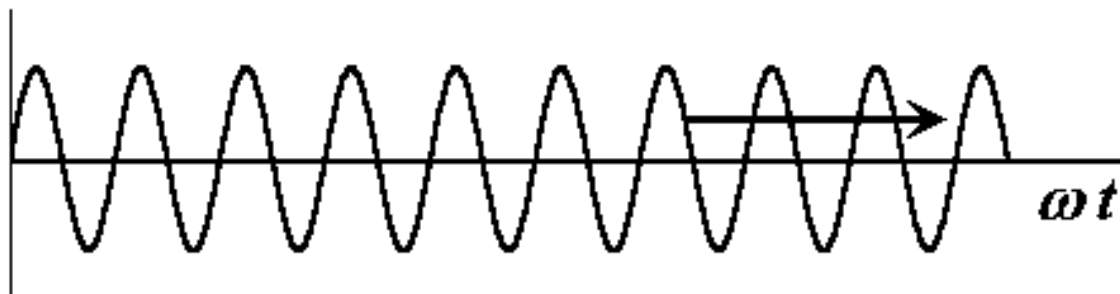
随着光纤制作工艺的提高，光纤的**损耗**已接近理论极限，因此光纤的**色散**成为实现超大容量光纤通信亟待解决的问题。

如果光脉冲中不同频率的光传播速度不一致，光脉冲在传播过程中会被展宽或畸变，这即是光纤的色散，其最终结果是相邻脉冲相互交叠。当交叠达到一定程度后，接收端无法将相邻脉冲区分开，就会发生误码。因此，**光纤色散特性限制了光纤的传输码速率和传输距离**，使光纤通信系统的质量下降。

平面波的相速

一个频率为 ω 、波矢为 k 、沿 x 方向传播的平面波为：

$$u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$$



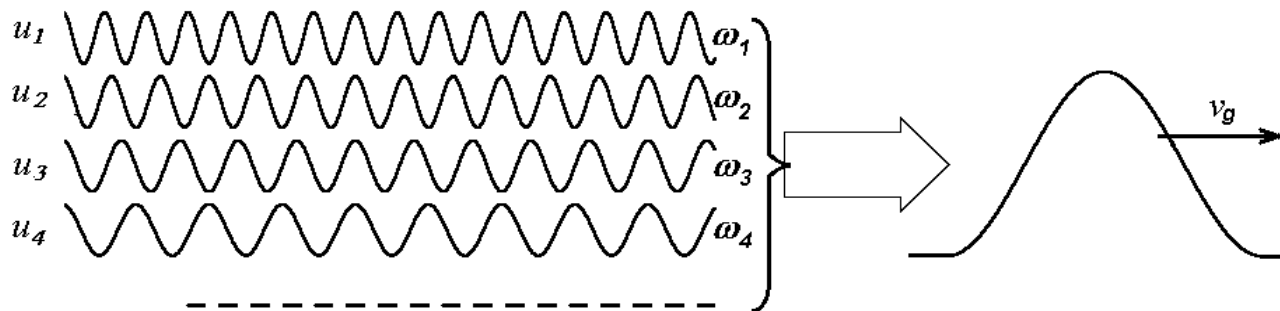
单色波等相位面推进的速度即是**相速**。
等相位面 $\varphi = kx - \omega t = \text{const.}$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = k dx - \omega dt = 0 \Rightarrow v_p = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{d\varphi=0} = \frac{\omega}{k}$$

波包的群速

一个波包或脉冲是由许多不同频率的单色波(谐波)叠加而成:

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$



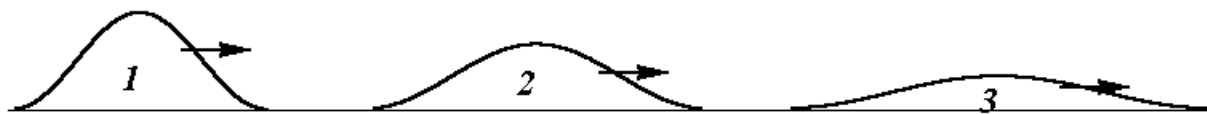
partial

由不同频率的单色波合成的包络波，其上某一恒定相位点推进的速度称为群速 v_g ，它是波包的移动速度。

相速不一定大于群速，信号速不大于光速。
介质传播速度：相速

色散

如果波包中不同频率成分的波都有不同的传播速度，则波包在传播中逐渐展宽而弥散开来，这种现象称为色散



光纤导光原理

光纤是以 SiO_2 为主要成分的细丝，直径在数微米至数十微米，外面为包层和涂敷层。设线芯、包层和涂敷层的折射率分别为 n_1 、 n_2 、 n_0 。 $n_1 > n_2$ ，所以包层界面有临界全反射角。如果满足全反射条件，光线将在光纤和包层的界面上，产生全反射而向前传播。

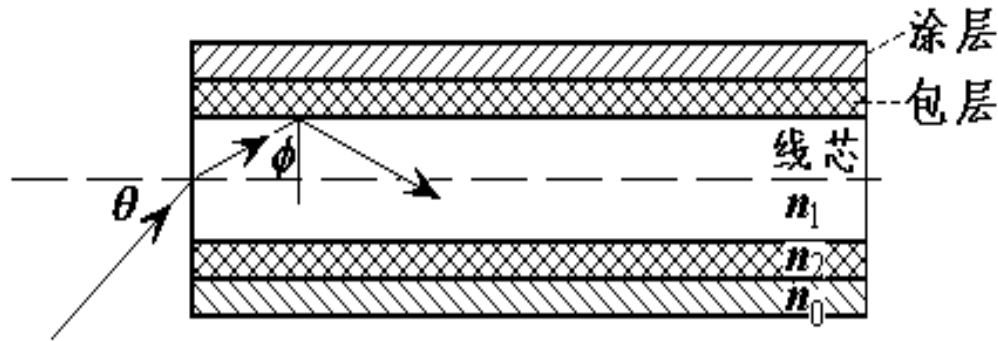


图6.1-1 光在光纤中的传播原理

光纤色散

(1) 什么是光纤的色散

- 光纤中传送的信号是由不同的频率成分和同一频率下的不同模式成分构成的，它们有不同的传播速度，将会引起脉冲波形发生变化。
- 可以从波形在时间上展宽的角度去理解，即光脉冲在光纤中传输，随着传输距离的加大，脉冲波形在时间上发生了展宽，这种现象称为光纤的色散。

光纤色散

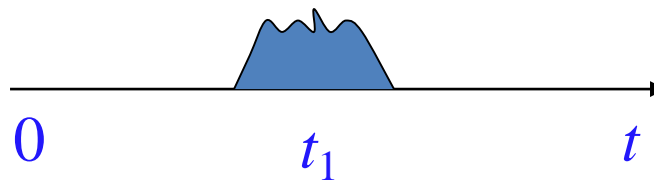
- 色散导致光脉冲展宽:

脉宽 τ_0

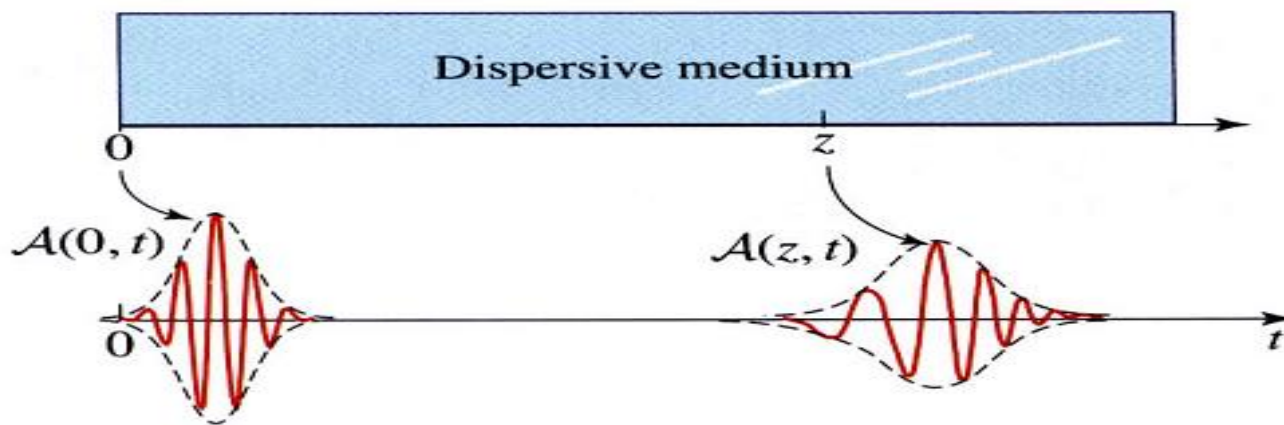


发送端

脉宽 τ



接收端



光纤色散

(2) 光纤中的色散分类

模式色散：光纤中同一频率、不同模式的电磁波在波导中传播时，其传播常数不同，它所引起的色散称为模式色散(不同模式的截止频率、截止波长不同)。

材料色散：由于光纤材料的折射率 n 与频率 ω 有关，从而使光的传播速度随频率而变化，这样引起的色散称为材料色散。

波导色散：光纤中同一模式、不同频率的电磁波在波导中传播时，其传播常数不同，这样引起的色散称为波导色散。

$$v_p \propto \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}, \quad v_g \propto \sqrt{1 - (\frac{\omega_c}{\omega})^2} = \sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}$$

光纤色散

(3) 光纤色散的表示方法

- 色散的大小用群时延差来表示。

① 群时延

- 在光纤中传播的光脉冲，其能速等于它的群速 v_g ，光脉冲传播单位长度所需的时间称为群时延，用 τ 表示，即有

$$\tau = 1/v_g = dk/d\omega \quad (6.1.1)$$

② 群时延差

- 不同速度的信号，传输同样的距离，需要不同的时间，即各信号的群时延不同，它们之间的差值，称为群时延差，用 $\Delta\tau$ 表示。

光纤色散

- 群时延差 $\Delta\tau$ 可由不同的频率成分引起，也可由不同的模式成份引起。
- 色散程度要用群时延差来描述，时延差越大，色散就越严重。
- 与三种色散相对应，群时延差由三部分组成

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\tau_m)^2 + (\Delta\tau_n)^2 + (\Delta\tau_w)^2} \quad (6.1.2)$$

式中 $\Delta\tau_m$ 、 $\Delta\tau_n$ 、 $\Delta\tau_w$ 分别为模式色散、材料色散和波导色散所引起的脉冲展宽的均方根值，即

总结一下

- $\Delta\tau_m$ ——光纤模式色散引起的群时延差 (不同模式之间)
- $\Delta\tau_n$ ——光纤材料色散引起的群时延差 (不同频率之间)
- $\Delta\tau_w$ ——光纤波导色散引起的群时延差 (不同频率之间)

一般说来， $\Delta\tau_m \gg \Delta\tau_n \gg \Delta\tau_w$ (尽量采用单模光纤)

课外阅读（从此页到本节完毕）：相关理论分析

假设介质的折射率 n 是频率 ω 的函数 $n=n(\omega)$ ，设 $k=n\omega/c$ 是介质中波数的矢量大小，将它在 $\omega=\omega_0$ 处用泰勒级数展开

$$k(\omega) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} k_m(\omega_0) \frac{(\omega - \omega_0)^m}{m!} \quad (6.1.3)$$

$$(k_m(\omega_0)) = \left. \frac{d^m k}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

显然

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(n \frac{\omega}{c} \right) = \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} + \frac{n}{c} = \frac{\omega dn/d\omega}{c} + \frac{n}{c} = \frac{\omega dn/d\omega + n}{c}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega}$$

利用 $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{2\pi c}{\lambda \omega}, \omega = \frac{2\pi c}{\lambda n}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{d\omega} &= -\frac{2\pi c}{\lambda \omega^2} - \frac{2\pi c}{\lambda^2 \omega} \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda n^2}{2\pi c} - \frac{n}{\lambda} \left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^{-1} \\ \frac{d\omega}{d\lambda} &= -\frac{2\pi c}{\lambda^2 n} - \frac{2\pi c}{\lambda n^2} \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2 n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dn}{d\omega} = -\frac{\lambda n^2}{2\pi c} + \frac{\lambda n^2}{2\pi c} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1} = -\frac{n}{\omega} + \frac{n}{\omega} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1}$$

可得 $v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1} \quad (6.1.4)$

设 λ_0 是真空中波长，考虑到 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ ，有

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{d\lambda_0}{d\omega} \frac{d}{d\lambda_0} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{d}{d\lambda_0} = -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda_0} \Rightarrow$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} + \frac{n}{c} = -\frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} + \frac{n}{c},$$

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \frac{dk}{d\omega} = -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda_0} \left(-\frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0} + \frac{n}{c} \right)$$

得到

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \frac{d^2n}{d\lambda_0^2}$$

总结为

$$(6.1.5) \begin{cases} \frac{d^2 k}{d\omega^2} = \frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \\ \frac{d\omega}{d\lambda_0} = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}, \text{ or, } \Delta\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda_0 \end{cases}$$

(1) 多模光纤的群时延差

不同的模式，即使频率相同，其群时延也不同，从而不同模式之间出现群时延差 $\Delta\tau_m$ ，它等于传播最快的最低阶模与传播最慢的最高阶模的群时延之差。

$$v_g \propto \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

设光线1近似地沿一阶跃型光纤轴线传播，对应传播最快的最低阶模，其时延最短，它在单位长度上的时延为 $\tau_1=n_1/c$ ；光线2刚好满足全反射条件，对应传播最慢的最高阶模，它的时延最长它在单位长度上的时延为 $\tau_2=n_1/c\sin\theta_c$ ， θ_c 为全反射临界角。由全反射条件 $\sin\theta_c=n_2/n_1$ ，有

$$\Delta\tau_m = \tau_2 - \tau_1 = \frac{n_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \quad (6.1.6)$$

(2) 单模光纤中的群时延差

多模光纤中存在模间色散，它导致输入脉冲发生展宽。单模光纤内部只存在一个模式，但依然存在模内色散——材料色散和波导色散，使得脉冲展宽现象依然存在，这是因为群速度与频率有关。

考虑一条长为 L 的单模光纤，频率为 ω 的光谱分量将在一定的时间延迟 $T=L/v_g$ 后到达输出端。其中，群速度 v_g 与频率 ω 的相关性导致不同频率成分的时间延迟 T 不同，从而导致光脉冲的展宽。如果光脉冲的谱宽为 $\Delta\omega$ ，则光脉冲的到达输出端时的展宽为

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta\omega = L \left(\frac{d}{d\omega} \frac{1}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2 k}{d\omega^2} \Delta\omega \Rightarrow$$

$$\Delta T = L k_2 \Delta\omega \quad (6.1.7)$$

其中 $k_2=d^2k/d\omega^2$ 称作群速度色散参数。将(6.1.5)第二式代入(6.1.7)式中的 $\Delta\omega$ 得(为方便计，重新用 λ 表示真空中的波长 λ_0)

$$\Delta T = -(2\pi c/\lambda^2) k_2 L \Delta\lambda = DL \Delta\lambda \quad (6.1.8)$$

其中 $D = -(2\pi c/\lambda^2)k_2$ 称作单模光纤的色散参数，它可以写成 $D = D_n + D_w$ ，其中 D_n 和 D_w 分别叫做材料色散系数和波导色散系数。由(6.1.8)和群时延差的定义，有

$$\Delta T = (D_n + D_w)L\Delta\lambda = L(\Delta\tau_n + \Delta\tau_w) \quad (6.1.9)$$

$$(\tau = 1/v_g, \Delta\tau = (d\tau/d\omega)\Delta\omega)$$

①材料色散引起的群时延差 $\Delta\tau_n$ ：材料色散是由材料的折射率 n 随波长的变化而变化引起的，从而使光的传播速度随波长而变化，导致群时延 τ_n 随波长 λ 而变化。由于光纤中传播的光脉冲不是单色波，而是有一个有限的谱宽 $\Delta\lambda$ ，利用群时延定义(6.1.1)有(同样地，下面用 λ 代表真空中的波长)

伊瑞 (B) $k = n \frac{\omega}{c}$

$$\Delta\tau_n = \frac{d\tau_n}{d\lambda} \Delta\lambda = \frac{d\tau_n}{d\omega} \frac{d\omega}{d\lambda} \Delta\lambda = \frac{d^2k}{d\omega^2} \frac{d\omega}{d\lambda} \Delta\lambda$$

将(6.1.5)式代入上式，有(已改用 λ 代表真空中的波长)

$$(6.1.10) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\tau_n = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \Delta\lambda = D_n \Delta\lambda \\ D_n = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \end{array} \right.$$

②波导结构色散引起的群时延差 $\Delta\tau_w$ ：光纤中同一模式在不同的频率下传输时，其传播常数不同，这样引起的色散称为波导色散。由(6.1.9)有

$$\Delta\tau_w = D_w \Delta\lambda \quad (6.1.11)$$

其中波导色散系数 D_w 计算起来比较复杂，可以在光纤通信教材中了解。

附注：横截面尺寸为 $a \times b$ ($a > b$)的波导，其 (m, n) 模式下的传播常数为(实部称为相位常数，虚部称为衰减常数)

$$\beta_{lm} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - [(l\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2]}$$

$(l = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots)$

2. 光纤中的非线性特性与脉冲压缩

在足够强的光场作用下，光纤的各种特征参量会随光场呈非线性变化。

即非线性效应

非线性效应

光纤的非线性效应，是光纤在强光场作用下的一种物理效应。它可分为两类：

强光场

- 一类是由于散射作用而产生的非线性效应，如受激拉曼散射、布里渊散射等；
- 另一类是由于光纤的折射率随光强变化而产生的非线性效应，如自相位调制、交叉相位调制以及四波混频等。

光孤子的产生，对应第二种非线性

光纤的非线性效应

可以单独所以

假如光纤中传播的光束为强激光(准单色光), 则在强光场作用下, 光纤出现非线性极化, 即电极化强度 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 满足关系(忽略响应的滞后效应):

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots) \quad (6.1.12)$$

其中 $\chi^{(j)}$ 为 $(j+1)$ 阶电极化张量, ε_0 是真空介电常数。光纤材料多为 SiO_2 , 它的分子结构为对称性结构, 使得 $\chi^{(2)} = 0$ 。忽略三阶以上的非线性效应。由电位移矢量 \mathbf{D} 与极化矢量 \mathbf{P} 之间的关系有

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \triangleq \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_1 \mathbf{E}, \chi^{(2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_1 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}), \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

$\chi^{(4)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} = \overrightarrow{A}\overrightarrow{B}\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{E}\overrightarrow{E}\overrightarrow{E}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A}\overrightarrow{B}(\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{E})\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A}(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{E})(\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{E})$ 三阶张量

光纤的非线性效应

$$\vec{\mathbf{I}} = \vec{\epsilon}_x \vec{\epsilon}_x + \vec{\epsilon}_y \vec{\epsilon}_y + \vec{\epsilon}_z \vec{\epsilon}_z$$

因此有 (下面右式中的 $\chi^{(j)}$ 视为标量函数): $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\epsilon}_1 \mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}_0 (\chi^{(1)} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}) \mathbf{E} \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_0 (\chi^{(1)} + \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon}_1 \mathbf{E} \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_1$$

介质折射率为 (考虑到 $\boldsymbol{\epsilon}_1 \ll \boldsymbol{\epsilon}_0$, 非磁性介质 $\mu = \mu_0$)

$$n = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\epsilon}\mu}{\boldsymbol{\epsilon}_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_1}{\boldsymbol{\epsilon}_0}} \approx 1 + \frac{\boldsymbol{\epsilon}_1}{2\boldsymbol{\epsilon}_0} = 1 + \frac{1}{2} \chi^{(1)} + \frac{1}{2} \chi^{(3)} |\mathbf{E}|^2$$

故可令: $n = n_0 + \eta |\mathbf{E}|^2$, $\eta = \chi^{(3)} / 2$ (6.1.13)

Kerr effect

上式右端第一项对应折射率的线性部分, 第二项是非线性效应贡献。上面只是启发性推导。

光纤的非线性效应

$$n = n_0 + \eta |E|^2 = n_0 + \Delta n$$

介质材料折射率 n 随光强 $|E|^2$ 变化而变化的特性，称为**克尔效应(Kerr effect)**，其中 η 称为**克尔系数**。石英光纤的克尔系数 $\eta \sim 10^{-22}(\text{m/V})^2$ 。虽然光纤中电场较大，约为 $10^6(\text{V/m}, \text{伏/米})$ ，但总的折射率变化 Δn 还是很小 ($\sim 10^{-10}$)。即使如此，这种变化对光纤传输特性的影响还是很大的(在下面 λ 是真空中波长)。

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} (n_0 + \Delta n) \Rightarrow \frac{\omega}{c} n_0 + \frac{\omega}{c} \Delta n = k_0 + \Delta k = \frac{\omega}{c} n_0 + \frac{\omega}{c} \eta |E|^2$$

$$\Rightarrow k_0 = \frac{\omega}{c} n_0, \quad \Delta k = \frac{\omega}{c} \eta |E|^2 = \frac{\omega}{c} \Delta n = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n, \quad \text{频率与波长}$$

$$\exp(-i\omega t + ikz) = \exp(i\varphi) = \exp[i(\varphi_0 + \Delta\varphi)], \quad \Delta\varphi = \Delta k z = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n z$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k \Rightarrow -\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} = \Delta \omega, \quad \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial z} = \Delta k$$

$$n = n_0 + \eta |\mathbf{E}|^2 = n_0 + \Delta n$$

$$\Delta n = \eta |\mathbf{E}|^2$$

设 L 为光纤长度，折射率的非线性项在光纤中产生的额外相移为

$$\Delta\varphi(t) = \Delta kL = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta nL = \frac{2\pi}{\lambda} \eta I(t)L, \quad I(t) = |\mathbf{E}(t)|^2 \quad (6.1.14)$$

相移量与光强成正比，因而导致光脉冲的不同部位有不同的相移，称自相位调制(SPM)，SPM相移引起频率移动

$$\Delta\omega = -\frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\lambda} \eta L \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (6.1.15)$$

$$\exp(-i\omega t + ikz) = \exp(i\varphi) = \exp[i(\varphi_0 + \Delta\varphi)]$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = k \Rightarrow -\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} = \Delta\omega, \quad \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial z} = \Delta k,$$

总之，设真空波长为 λ 、光强为 $I(t)=|E(t)|^2$ 的光脉冲在长度为 L 的光纤中传输，光强感应的折射率变化 Δn 以及由此引起的相位变化 $\Delta\varphi$ 分别为

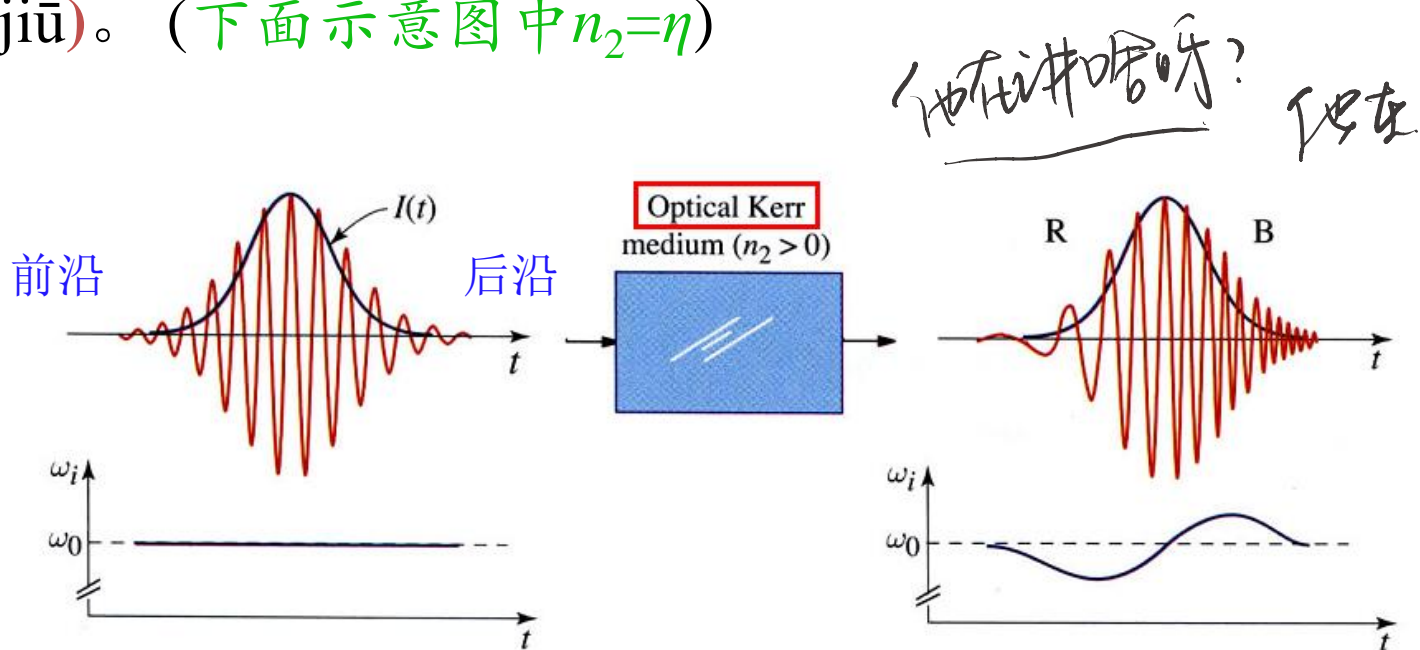
$$(6.1.14') \begin{cases} \Delta n(t) = \eta |E(t)|^2 \\ \Delta\varphi(t) = \frac{\omega}{c} \Delta n(t) L = \frac{2\pi L}{\lambda} \eta |E(t)|^2 \end{cases}$$

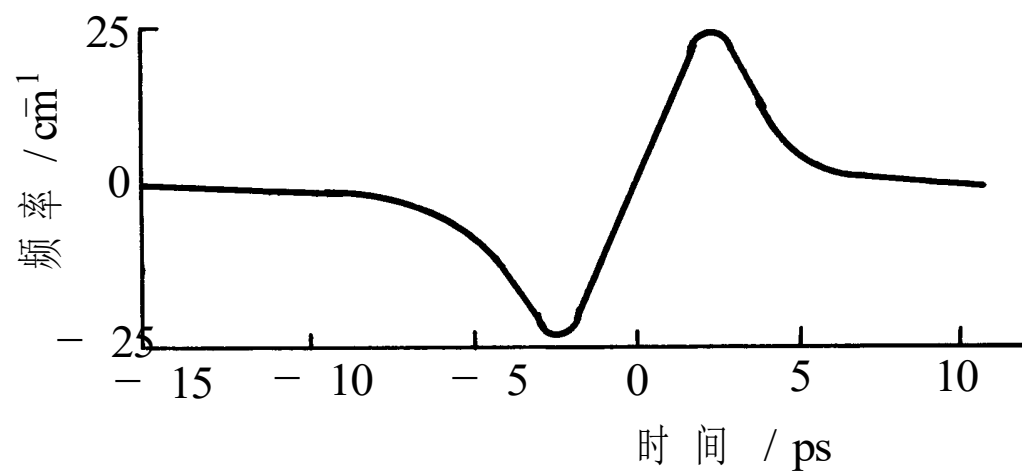
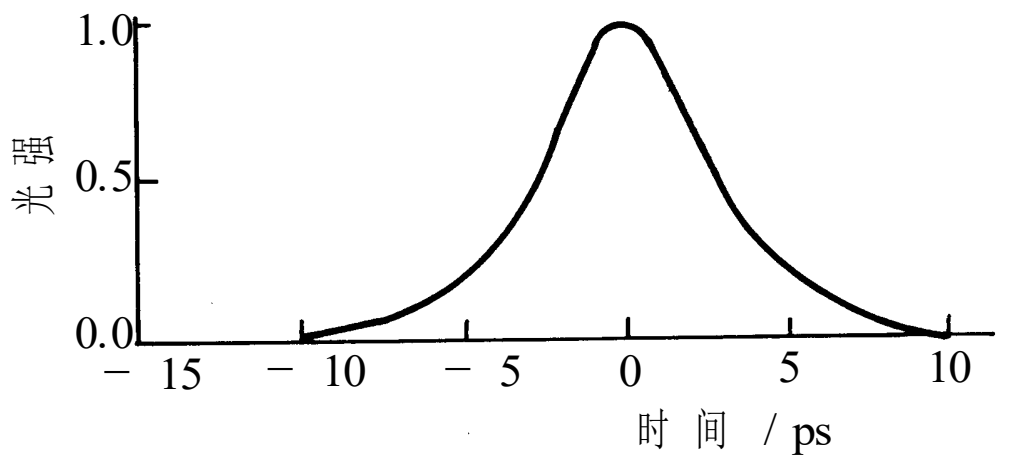
这种使脉冲不同部位产生不同相移的特性，称为**自相位调制(SPM)**。SPM相移引起频率移动为

$$\Delta\omega(t) = -\frac{\partial\Delta\varphi(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi L\eta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} |E(t)|^2 \quad (6.1.15')$$

$$\Delta\omega(t) = -\frac{2\pi L\eta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} |E(t)|^2 \quad (6.1.15') \quad \eta = \frac{\chi^{(3)}}{2}$$

在脉冲前沿，光强 $I(t)=|E|^2$ 随时间在增加，得到 $\Delta\omega < 0$ ，频率降低(Red移)；在脉冲后沿， $|E|^2$ 在减小，得到 $\Delta\omega > 0$ ，频率升高(Blue移)。这称为**脉冲已被线性调频**，或称**啁啾(Chirp)**，读zhōujiū)。(下面示意图中 $n_2 = \eta$)





$$\Delta\omega(t) = -\frac{2\pi L\eta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} |E(t)|^2$$

with $\eta > 0$

图6.1.1 脉冲的光强频率调制

假设介质有负色散特性，即群速随频率增加而增加。由于脉冲前沿 $\Delta\omega < 0$ ，前沿速度因非线性效应而减小；脉冲后沿 $\Delta\omega > 0$ ，后沿速度因非线性效应而增大。前沿变慢而后沿加快的结果，造成脉宽变窄，此现象称为自相位调制压缩（Self-phase modulation—SPM）

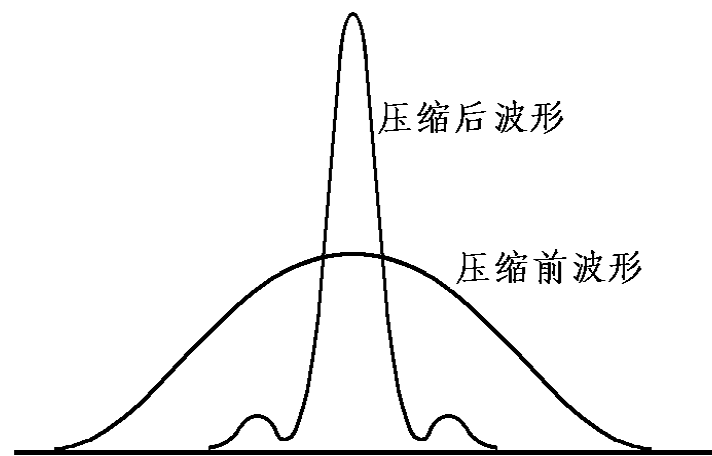


图6.1-2 光脉冲的自相位调制压缩

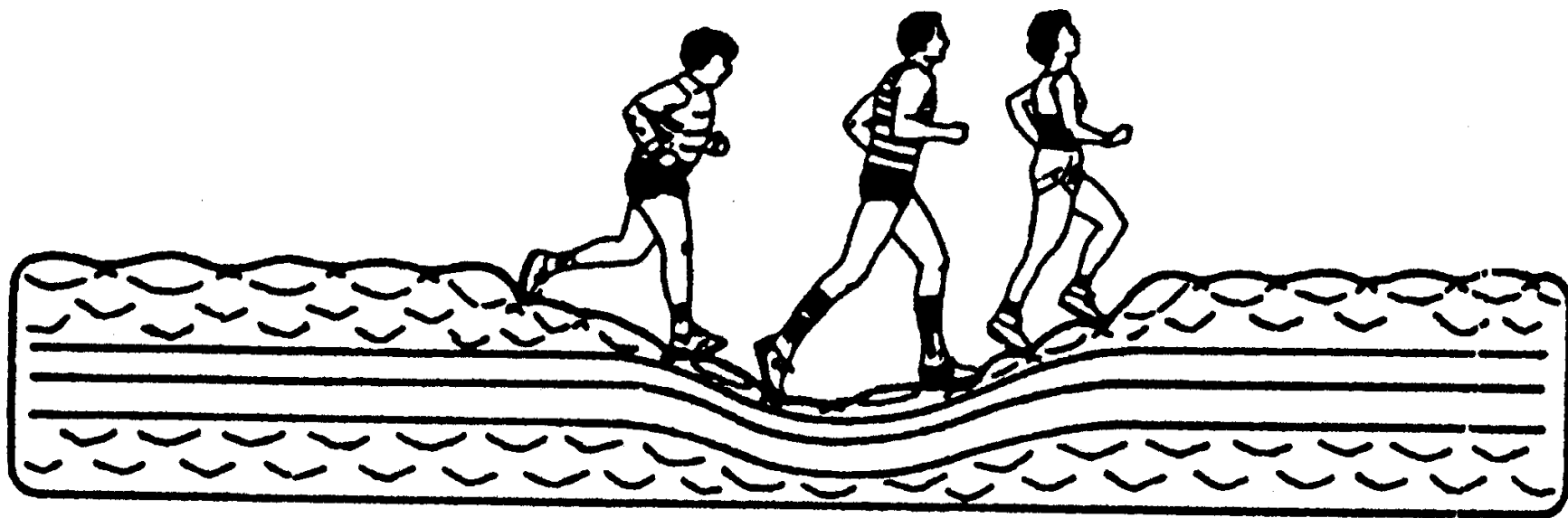


图6.1-3 光脉冲自相位调制压缩的直观比喻

3. 光纤孤子的形成机理

设光纤无损耗，在光纤中传输的调制波为线性偏振模式，其场可以表示为

$$E(r, z, t) = R(r)E_0(z, t)\exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$$

式中， $R(r)$ 为径向本征函数， $E_0(z, t)$ 为脉冲的调制包络函数， ω_0 为光载波频率， k_0 为调制频率 $\omega = \omega_0$ 时的传播常数。

设调制波 $E(r, z, t)$ 的频率分布在 $\omega = \omega_0$ 处有峰值，频谱较窄，则可近似为单色平面波。

由于非线性Kerr效应, $n = n_0 + \eta |\mathbf{E}|^2$, 传播常数可以写成

$$\underline{k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} (n_0 + \eta |\mathbf{E}|^2) = \frac{\omega}{c} (n_0 + \eta \frac{P}{S_e})} \quad (6.1.16)$$

式中已经对光强取时间平均, 此时有 $I = |\mathbf{E}|^2 = P/S_e$, P 为光功率, S_e 为光纤有效横截面积 (以光信号所占据的地方计算)。由此可见, k 不仅是频率 ω 的函数 (色散), 也是光功率 P 的函数 (非线性): $k = k(\omega, P)$. 在 $(\omega, P) = (\omega_0, 0)$ 处, 把 $k(\omega, P)$ 展开成泰勒级数, 忽略二阶以上色散和一阶以上非线性, 得到

$$(6.1.17) \left\{ \begin{array}{l} k(\omega, P) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)^2 + \beta'_0 P \\ k'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0, P=0}, \quad k''_0 = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0, P=0}, \quad \beta'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial P} \right|_{\omega=\omega_0, P=0} \end{array} \right.$$

由(6.1.16)知

$$k = \frac{\omega}{c} n_0 + \frac{\omega \eta}{c S_e} P \Rightarrow \beta'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial P} \right|_{\omega=\omega_0, P=0} = \frac{\omega_0 \eta}{c S_e} \quad (6.1.18)$$

式(6.1.17)虽然略去高次项，但仍较完整地描述了光脉冲在光纤中传输的特性，式中右边第三项和第四项最为重要，这两项正好体现了光纤色散和非线性效应的影响。

$$k(\omega, P) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)^2 + \beta'_0 P \quad (6.1.17)$$

线性、非线性相变

色散项与非线性项

$$k(\omega, P) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + k''_0(\omega - \omega_0)^2 / 2 + \beta'_0 P \quad (6.1.17)$$

$$k'' = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} < 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} v_g > 0$$

在式(6.1.17)中，如果 $k''_0 < 0$ （反常色散），同时 $\beta'_0 P > 0$ （正啁啾），即色散项为负而非线性项为正，适当选择相关参数，使两项绝对值相等，则光纤色散和非线性效应便相互抵消，由式(6.1.17)知此时传播速度与频率无关，不同频率成分传播速度一致，因而输入脉冲在介质中传播时，其宽度保持不变，形成稳定的光孤子。

脉冲在真空中传播一样。

此时群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{k'_0} \left(k'_0 = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0, P=0} \right)$

图6.1.2表示光脉冲在反常色散光纤中传输时，由于非线性效应而被压缩或展宽（对正常色散光纤，结论与此相反）。

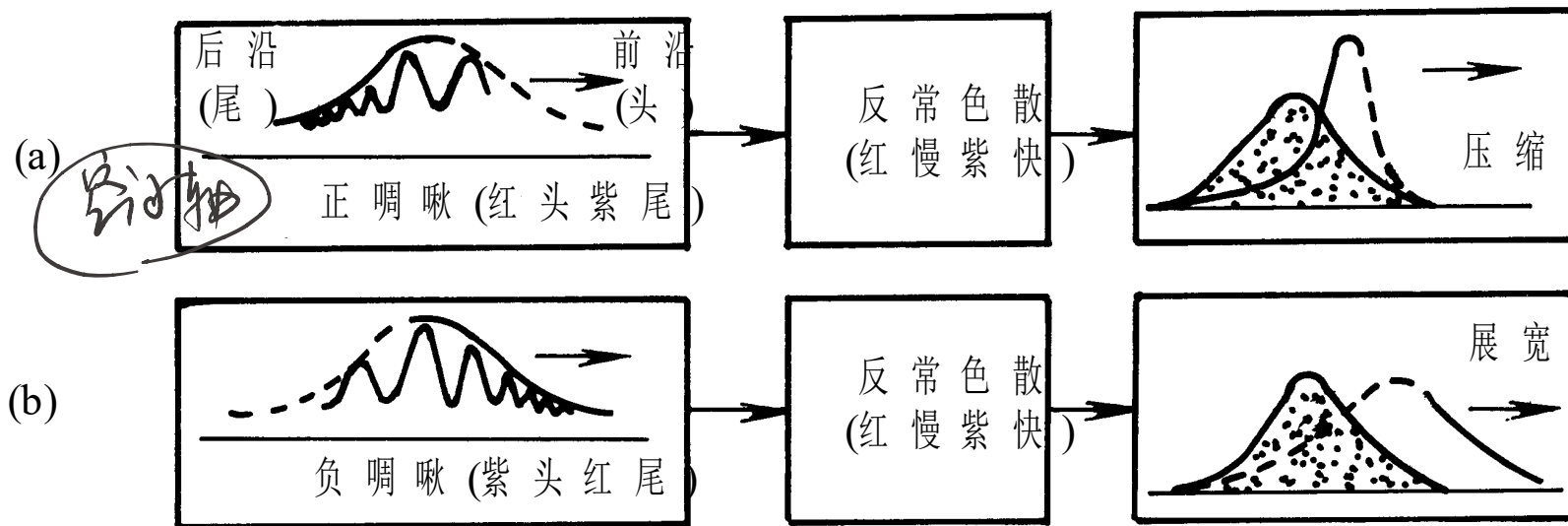


图6.1.2 脉冲在反常色散光纤中，可被压缩或展宽

注意: 上图横轴是传播方向上的空间轴，不是时间轴，此时右边代表前沿，左边是后沿

$$\Delta\omega(t) = -\frac{2\pi L\eta}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} |E(t)|^2, \text{ 正啁啾 } \eta > 0; \text{ 负啁啾 } \eta < 0$$

$$k(\omega, P) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + k''_0(\omega - \omega_0)^2 / 2 + \beta'_0 P$$

为了让色散效应和非线性效应能够相消，要求同时满足反常色散($k''_0 < 0$)与正啁啾($\beta'_0 P > 0$)，故具有正啁啾的光脉冲通过反常色散光纤时，必然同时满足

$$\text{反常色散: } k'' = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} < 0; \text{ 正啁啾: } \beta'_0 = \frac{\omega_0 \eta}{c S_e} > 0 \Rightarrow \eta > 0$$

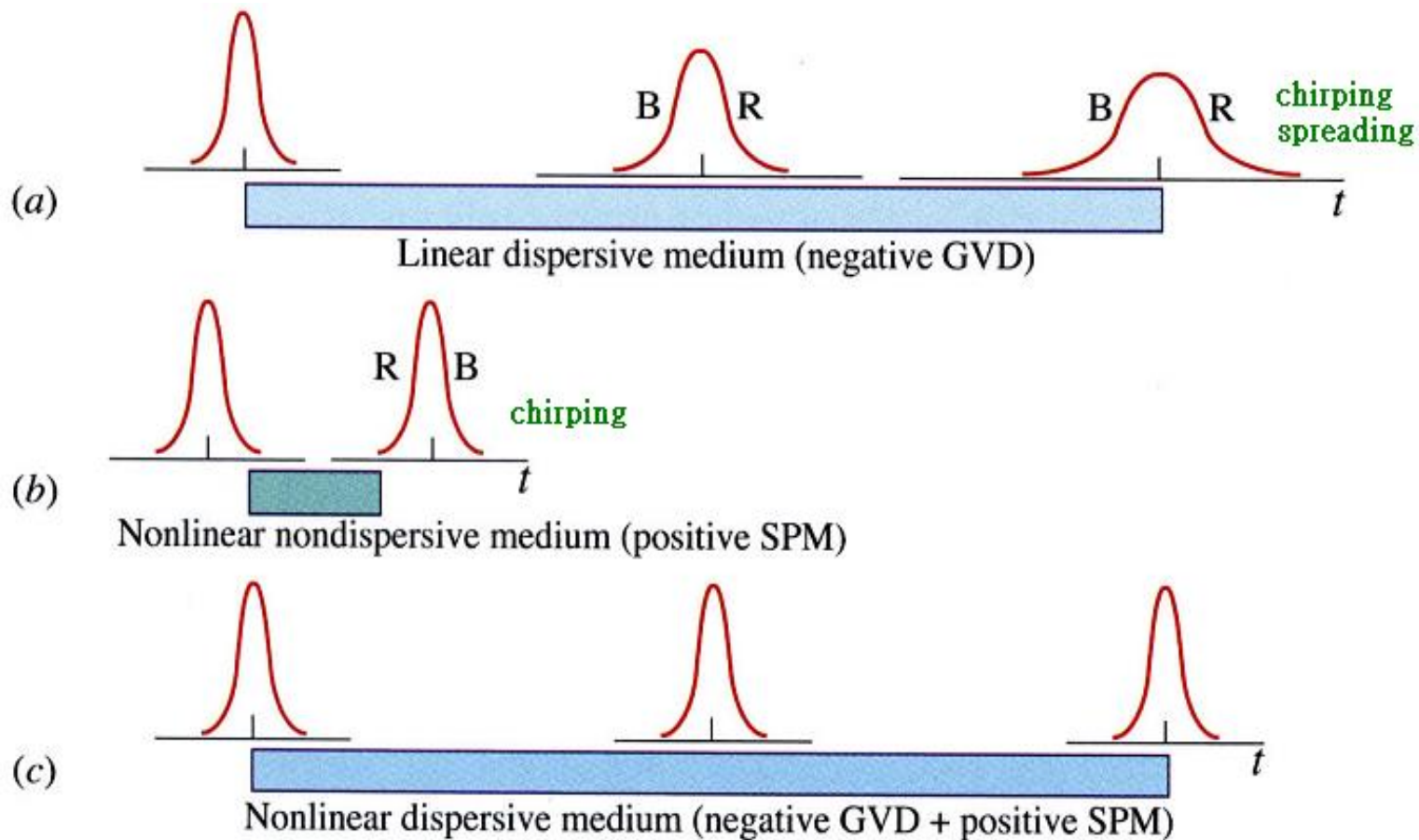
这使得脉冲前沿频率降低，传播变慢，而后沿频率升高，传播加快。这种脉冲形象地被称为“红头紫尾”光脉冲。在传播过程中，如果由非线性引起的压缩效应，超过由色散引起的展宽效应，则脉冲将被压缩，如图6.1.2(a)。

相反，具有负啁啾的光脉冲通过反常色散光纤时，前部传播加快，后部传播变慢，“紫”头和“红”尾逐渐分离，结果脉冲被展宽，如图6.1.2(b)所示

总之，同时存在色散与非线性Kerr效应的介质中，群速色散效应(GVD)与自相位调制效应(SPM)共同作用的结果，让脉冲产生净的展宽或压缩。但是如果一定条件下两种效应相互抵消，则可以可以使输入的脉冲宽度保持不变，就如同在理想的非色散线性介质中一样，从而形成稳定的光孤子。

$$k(\omega, P) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{k'_0} \Rightarrow \frac{dv_g}{d\omega} = 0$$



- a) 负色散，频率高的先到，频率低的后到；
- b) 正啁啾，脉冲前沿频率红移，后沿频率紫移；
- c) 负色散+正啁啾，色散的展宽效应与非线性的压缩效应相互抵消时，脉冲形状保持不变。

6.2 光纤孤子的非线性Schrödinger方程

从Maxwell方程组出发，同时考虑光纤的色散效应和非线性效应，就可以建立起光孤子所满足的非线性Schrödinger方程。我们首先只考虑色散因素，再在此基础上考虑非线性因素。

1. 色散介质中的Maxwell方程

2. 非线性Schrödinger方程

1. 色散介质中的Maxwell方程

首先只考虑色散效应。假设光脉冲沿 x 轴线极化，沿 z 轴传播。光纤介质是非磁性的绝缘介质(即磁导率 $\mu=\mu_0$ 、电导率 $\sigma=0$)，在前面，我们已经得到此类介质中的波动方程，即利用 $D=\epsilon E=\epsilon_0 E+P$ ，用电场强度 $E(z,t)$ 和电极化强度 $P(z,t)$ 将方程表达为(根据分离变量法，光场沿光纤截面的分布因子可略去不写)

张明进

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E}{c^2 \partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6.2.1)$$

其中 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 是真空中光速

(6.2.1)式的解可写为

$$E(z, t) = E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)] \quad (6.2.2)$$

其中， ω_0 和 k_0 是波包的中心频率与波数，振幅 $E_0(z, t)$ 是时空坐标 (z, t) 的缓变函数，它代表波的包络函数。只考虑色散效应时，介质的折射率 n 是频率的函数 $n=n(\omega)$ ，把波矢量 $k=n\omega/c$ 在 $\omega=\omega_0$ 处用泰勒级数展开(忽略二阶以上项，把展开的零阶项移到方程左边) 把它看做常数

$$k(\omega) - k(\omega_0) = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (6.2.3)$$

右边第二项是色散项，它使得 k/ω (从而相速 ω/k)与频率 ω 有关。

令 $\Delta k = k(\omega) - k(\omega_0)$ 和 $\Delta \omega = \omega - \omega_0$ ，并且记

$$k' = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g}, \quad k'' = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (6.2.4)$$

对于给定的 ω_0 ，它们是常数。于是(6.2.3)式可以简写为

$$k(\omega) - k(\omega_0) = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2$$
$$\Rightarrow \Delta k = k' \Delta \omega + \frac{1}{2} k'' (\Delta \omega)^2 \quad (6.2.3')$$

对缓变的包络函数 $E_0(z, t)$ 作二维Fourier变换得

$$F(\Delta k, \Delta \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(z, t) e^{i(\Delta \omega t - \Delta k z)} dz dt \quad (1)$$

$$E_0(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Delta k, \Delta \omega) e^{-i(\Delta \omega t - \Delta k z)} d(\Delta \omega) d(\Delta k) \quad (2)$$

即关于变量 (z, t) 的函数 E_0 与关于变量 $(\Delta k, \Delta \omega)$ 的函数 F 之间的变换。由(2)可以给出如下二维Fourier变换式($m=1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial^m E_0}{\partial t^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\Delta \omega)^m F e^{-i(\Delta \omega t - \Delta k z)} d(\Delta \omega) d(\Delta k) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^m E_0}{\partial z^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (i\Delta k)^m F e^{-i(\Delta \omega t - \Delta k z)} d(\Delta \omega) d(\Delta k) \quad (4)$$

傅里叶变换对

$$(i)^m \frac{\partial^m E_0}{\partial t^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta\omega)^m F e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega) d(\Delta k) \quad (3)$$

$$(-i)^m \frac{\partial^m E_0}{\partial z^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta k)^m F e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega) d(\Delta k) \quad (4)$$

对(6.2.3')式两边同时右乘 $F(\Delta k, \Delta\omega)$ 可得

$$\Delta k F = k' \Delta\omega F + \frac{1}{2} k'' (\Delta\omega)^2 F \quad (5)$$

利用(3)和(4)对上式两边同时作Fourier变换,得

$$-i \frac{\partial E_0}{\partial z} = k' i \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{1}{2} k'' \left(-\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \right)$$

把 $k' = 1/v_g$ 代入上式，整理得

$$\frac{\partial E_0(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0(z,t)}{\partial t} + \frac{ik''}{2} \frac{\partial^2 E_0(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.2.5)$$

线性偏微分方程

方程(6.2.5)是只考虑光纤具有群速色散时，光场传播所服从的方程(双曲方程)，它是一个线性偏微分方程，其解服从线性叠加原理。方程(6.2.5)是研究光脉冲在有色散的线性介质中的运动方程。

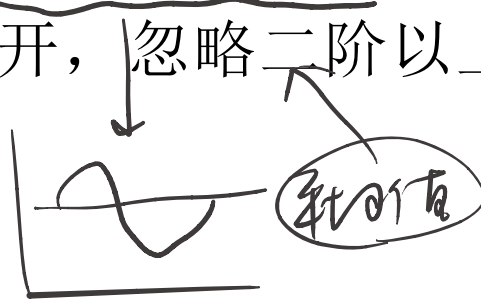
2. 非线性Schrödinger方程

在前面讨论的基础上，现在进一步考虑到光纤介质的非线性效应。如前面所述，对于光纤孤子的形成而言，只需考虑到非线性效应中的Kerr效应，即光纤折射率 n 随光强 $I=|E|^2$ 而变化的特性。

Here $E(z,t) = E_0(z,t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$ (6.2.2)

11.28

由于非线性Kerr效应，光纤折射率 n (因而波数矢量 k)不仅是频率 ω 的函数(色散性)，而且还是光强 $I=|E|^2$ 的函数(非线性)。对光强取时间平均值时，有 $I = \langle E^2 \rangle = |E_0|^2/2$ 。在 $(\omega, I) = (\omega_0, 0)$ 处，把 $k(\omega, I)$ 用Taylor级数展开，忽略二阶以上色散和一阶以上非线性，得到



强度为0时的值
作级数展开

$$(6.2.6) \left\{ \begin{aligned} k(\omega, I) &= k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)^2 + \underline{\beta'_0 I} \\ k'_0 &= \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0, I=0}, \quad k''_0 = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0, I=0}, \quad \beta'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial I} \right|_{\omega=\omega_0, I=0} \end{aligned} \right.$$

其中有($\langle E^2 \rangle$ 表示 E^2 的时间平均)

Kerr 效应

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} (n_0 + \eta \langle E^2 \rangle) = \frac{\omega}{c} n_0 + \frac{\omega}{c} \eta I, \quad I = \frac{1}{2} |E_0|^2 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \beta'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial I} \right|_{\omega=\omega_0, I=0} = \frac{\omega_0}{c} \eta$$

与材料有关

$$k'_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0, I=0} = \frac{1}{v_g(\omega_0, 0)} = \frac{1}{v_g} \quad (6.2.7) \quad \checkmark$$

$$(6.2.6) \left\{ \begin{array}{l} k(\omega, I) = k(\omega_0, 0) + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''_0(\omega - \omega_0)^2 + \beta'_0 I \\ k'_0 = \frac{1}{v_g}, \quad \beta'_0 = \frac{\eta\omega_0}{c}, \quad I = \frac{1}{2} |E_0|^2 \end{array} \right.$$

令 $\Delta k = k(\omega, I) - k(\omega_0, 0)$ 和 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, 则(6.2.6)式可以简写为

$$\Delta k = \frac{1}{v_g} \Delta\omega + \frac{1}{2} k''_0(\Delta\omega)^2 + \frac{\eta\omega_0}{2c} |E_0|^2 \quad (6.2.8)$$

对(6.2.8)式两边同时右乘 $F = F(\Delta k, \Delta\omega)$ 可得

$$\Delta k F = \frac{1}{v_g} \Delta\omega F + \frac{1}{2} k''_0(\Delta\omega)^2 F + \frac{\eta\omega_0}{2c} |E_0|^2 F$$

利用

$$E_0 = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} F e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega) d(\Delta k) \quad (2)$$

$$(i)^m \frac{\partial^m E_0}{\partial t^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta\omega)^m F e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega) d(\Delta k) \quad (3)$$

$$(-i)^m \frac{\partial^m E_0}{\partial z^m} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta k)^m F e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k z)} d(\Delta\omega) d(\Delta k) \quad (4)$$

可得

$$\Delta k F = \frac{1}{v_g} \Delta\omega F + \frac{1}{2} k_0'' (\Delta\omega)^2 F + \frac{\eta\omega_0}{2c} |E_0|^2 F \quad (A)$$



$$-i \frac{\partial E_0}{\partial z} = \frac{1}{v_g} (i \frac{\partial E_0}{\partial t}) + \frac{1}{2} k_0'' (-\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}) + \frac{\eta\omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 \quad (B)$$

即对(A)式两边同时右乘 $\exp[-i(\Delta\omega t - \Delta k z)]/(2\pi)$ ，再对变量 $\Delta\omega$ 和 Δk 在无穷区间上作双重积分，可得到(B)式

对(B)式

$$-i \frac{\partial E_0}{\partial z} = i \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0}{\partial t} - \frac{1}{2} k_0'' \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0$$

整理得

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0}{\partial t} + i \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - i \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (6.2.9)$$

把这项算掉

非线性项

由(6.2.6)和(6.2.7)式知

(下一页)

$$k_0'' = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0, I=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{v_g} \right) \bigg|_{\omega=\omega_0, I=0} = - \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \bigg|_{\omega=\omega_0, I=0}$$

其中 $k_0'' < 0$ 对应反常色散情形(速度随频率增大而增大),

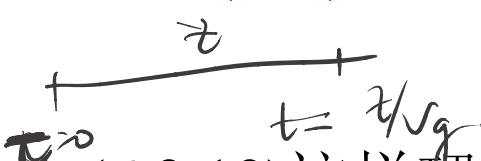
$k_0'' > 0$ 对应正常色散情形(速度随频率增大而减小)。

对于我们研究的光孤子而言，只需考虑反常色散情形 $k''_0 < 0$ 。

为此，引入如下变量代换

$$t \rightarrow \tau = t - z/v_g \text{ 推迟时间}$$

$$(z, t) \rightarrow (\xi, \tau): \begin{cases} \xi = z \\ \tau = (-k''_0)^{-1/2} (t - z/v_g) \end{cases} \quad (6.2.10)$$



(6.2.10)这样理解：空间坐标 z 保持不变，而时间坐标由场点时间 t 变换到源点时间 τ （相差一个标度因子）。此时有（注意偏导数只对显含的变量作运算） 独立变量

$$(6.2.11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{v_g \sqrt{-k''_0}} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{-k''_0}} \frac{\partial}{\partial \tau} \end{array} \right.$$

偏导数

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E_0}{\partial t} + i \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - i \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (6.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{v_g \sqrt{-k_0''}} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-k_0''}} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (6.2.11)$$

把(6.2.11)式代入(6.2.9)式，整理得

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (6.2.12)$$

it is valid for $k_0'' < 0$ (.e., the negative-dispersion case)

$$E_0(\xi, \tau) = E_0(z, t), \quad E(r, z, t) = R(r) E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$$

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (k_0'' < 0) \quad (6.2.12)$$

通常把(6.2.12)式称作**非线性Schrödinger方程**，因为在形式上它跟非相对论量子力学中的Schrödinger方程类似，唯一的差别是**多了非线性项**，该项的存在，使得线性叠加原理不再成立，即该方程任意两个解的线性叠加，不再是原方程的解。**在正色散情形**，同理可得

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0 \quad (k_0'' > 0) \quad \text{反色散.}$$

方程中的变量 $\tau \propto (t - z/v_g)$ ，它表示光脉冲以群速度 v_g 传播时，在位置 z 处相对于位置 $z=0$ 处的延迟时间。
 $z = (t - z/v_g)$

非线性薛定谔方程与一维运动自由粒子的薛定谔方程形式对比

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0$$

↓
(z) (t, E)

$$\begin{cases} \xi = z \\ \tau = (-k_0'')^{-1/2} (t - z/v_g) \end{cases}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \xrightarrow[\hbar=1]{m=1} i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

与真实的薛定谔方程对比，上面的非线性薛定谔方程中，时空坐标角色互换了。但如果从频率关于波数和光强的函数出发，进行泰勒级数展开，再做类似处理，得到的非线性薛定谔方程，是关于时间的一阶导数和关于空间的二阶导数

$$\underline{k(\omega, I)} \leftrightarrow \underline{\omega(k, I)}$$

所以互相转换的。

注意 : $\frac{\partial E_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0$ ($k_0'' < 0$). (6.2.12)

• 在非线性 Schrödinger 方程 (6.2.12) 的推导中, 忽略了二阶以上的色散项 (即在式 (6.2.6) 中, 只保留了关于频率的二阶偏导数项)。

• 在方程 (6.2.12) 的推导中, 忽略了一阶以上的非线性项 (即在 (6.2.6) 式中, 只保留了关于光强的一阶偏导数项), 因而只适用于弱非线性情形。在强非线性情形, 高阶项不能忽略, 例如此时光纤中将出现 Raman 散射和 Brillouin 散射, 产生新的频率分量和交叉相位调制。

• 方程 (6.2.12) 只适用于皮秒 ($\text{ps} = 10^{-12}\text{s}$) 量级的孤子脉冲, 而不能描述飞秒 ($\text{fs} = 10^{-15}\text{s}$) 级的孤子脉冲的传播方程。对于 fs 级的脉冲, 场振幅的缓变近似条件失效。

$$E_0(\xi, \tau) = E_0(z, t), \quad E(r, z, t) = R(r) E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$$

$$i \frac{\partial E_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial \tau^2} + \frac{\eta \omega_0}{2c} |E_0|^2 E_0 = 0, \quad (k_0'' < 0) \quad (6.2.12)$$

为方便计，可以通过重新定义新的变量，把常数因子吸收到新变量中去，这样不改变问题的物理本质，使得方程表达变得简洁。非线性Schrödinger方程(6.2.12)可以更简单地表达为(后面均指负色散情形)

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (6.2.13)$$

$$\xi \propto z, \quad \tau \propto (t - z/v_g), \quad u \propto E_0$$

6.3 光学孤子在光纤中的传输特性

这一节从非线性Schrödinger方程(6.2.13)出发，研究光纤中孤子的传输特性

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (6.2.13)$$

$$\xi \propto z, \quad \tau \propto (t - z/v_g), \quad u \propto E_0$$

不相等

1. 光纤中孤子的传输特性
2. 光纤中孤子形成与保持的条件

1. 孤子的传输特性

$$E(r, z, t) = R(r)E_0(z, t)\exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$$

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (6.2.13)$$

$$\xi \propto z, \quad \tau \propto (t - z/v_g), \quad u \propto E_0$$

近似的为单色波

在光纤纤心的电场强度 $E(r, z, t)$ 中， $R(r)$ 描述径向分布， $E_0(z, t)$ 描述脉冲的调制包络（关于 (z, t) 的缓变函数）， ω_0 、 k_0 分别为光场的中心频率及其相应的波数，在非线性Schrödinger方程(6.2.13)中， $u(\tau, \xi) = u(z, t)$ 对应 $E_0(z, t)$ 。

在下面讨论孤子波形的变化时，讨论的是光强 $P \propto |E_0|^2 \propto |u|^2$ 随时空坐标 (z, t) 的变化。设在 $\xi=0$ ($z=0$) 处对光纤输入一个双曲正割型脉冲波

$$u(\tau, \xi = 0) = A \operatorname{sech}(\tau) \quad (6.3.7)$$

当系数 A 为整数 N 时，(6.3.7)描述一个稳定孤立子。以(6.3.7)为初始条件，可由逆散射方法得到非线性Schrödinger方程(6.2.13)的解。

注：用 $\operatorname{sech}(x)$ 表示双曲正割函数， $\operatorname{cosh}(x)$ 表示双曲余弦函数。它们互为倒数

$$\operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

当 $A=N$ 时，从初始条件(6.3.7)出发，可得到孤立子解。例如

As $N = 1$, one has

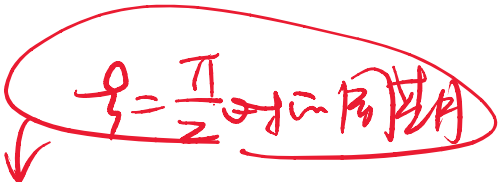
$$u(\tau, 0) = \operatorname{sech}(\tau) \Rightarrow u(\tau, \xi) = \operatorname{sech}(\tau) \exp(i \xi / 2) \quad (6.3.8)$$

1阶孤子

As $N = 2$, one has

$$u(\tau, 0) = 2 \operatorname{sech}(\tau) \Rightarrow$$

$$u(\tau, \xi) = \frac{4[\cosh(3\tau) + 3 \exp(i4\xi) \cosh(\tau)]}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\xi)} \exp(i \xi / 2) \quad (6.3.9)$$

$\xi = \frac{\pi}{2}$ 时同相位


对于 $N \geq 3$ 的解，解的表达式更为复杂。 $N=1$ 的解称为基本孤子，又称为一阶孤子； $N \geq 2$ 的解称为称为高阶孤子。图6.3.2-5是 $N=1、2、3$ 时的孤子波形演化(各个坐标轴上的坐标可以都是相对比值，例如 $\tau \rightarrow \tau/\tau_0$ 、 $\xi \rightarrow \xi/\xi_0$ 、 $P \rightarrow P/P_0$ 等)。

图形 演示

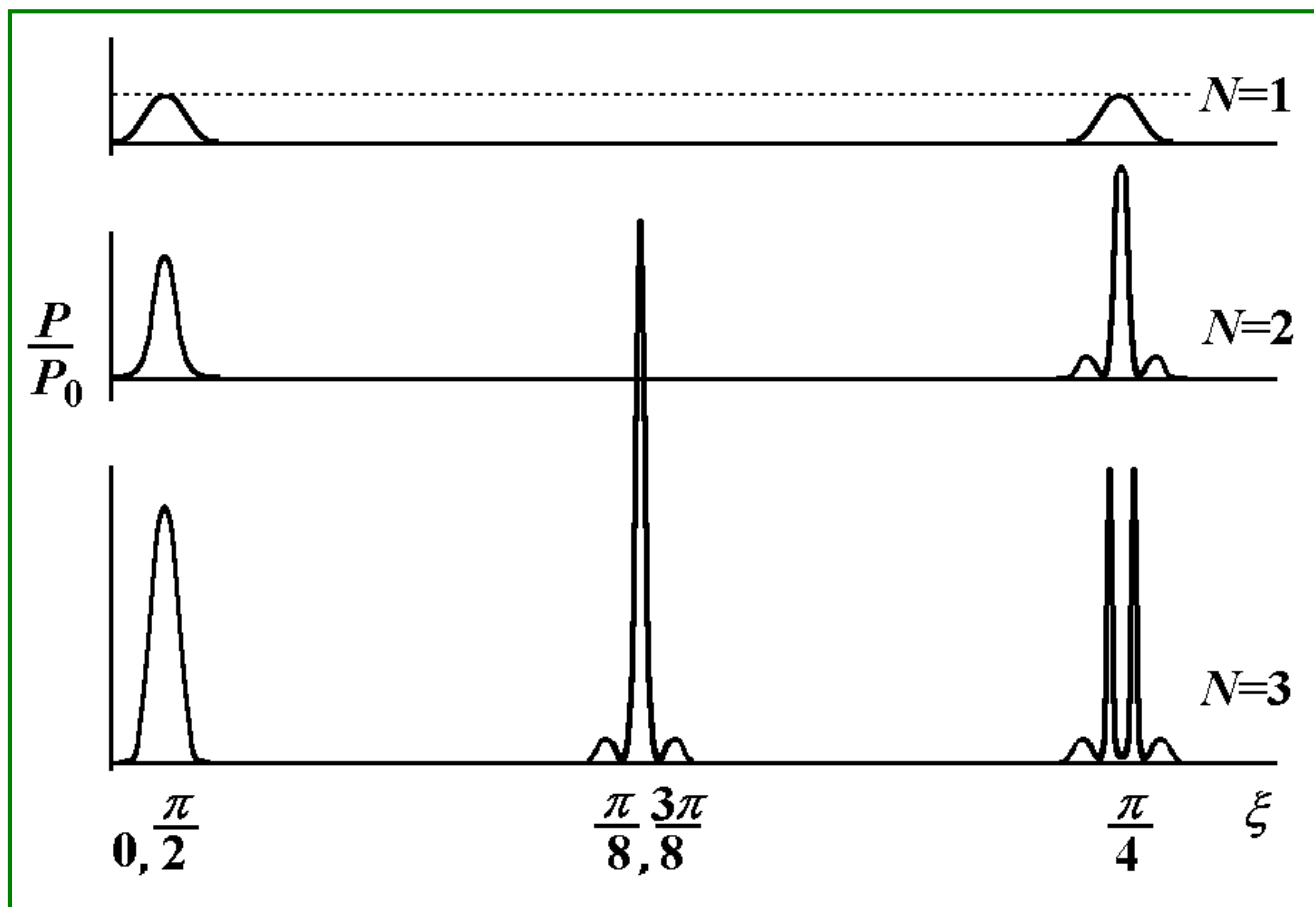


图 6.3.2 一阶、二阶和三阶孤子的演化波形

P 是光孤子的光强 $P \propto |u(\tau, \xi)|^2$

注：对于 $N=3$ 的曲线图，横坐标的数据，是说当 ξ 等于哪些值时，波形是这个样子，例如 $\xi=0$ 和 $\pi/2$ 时，波形一样（从而周期是 $\pi/2$ ）

图形演示

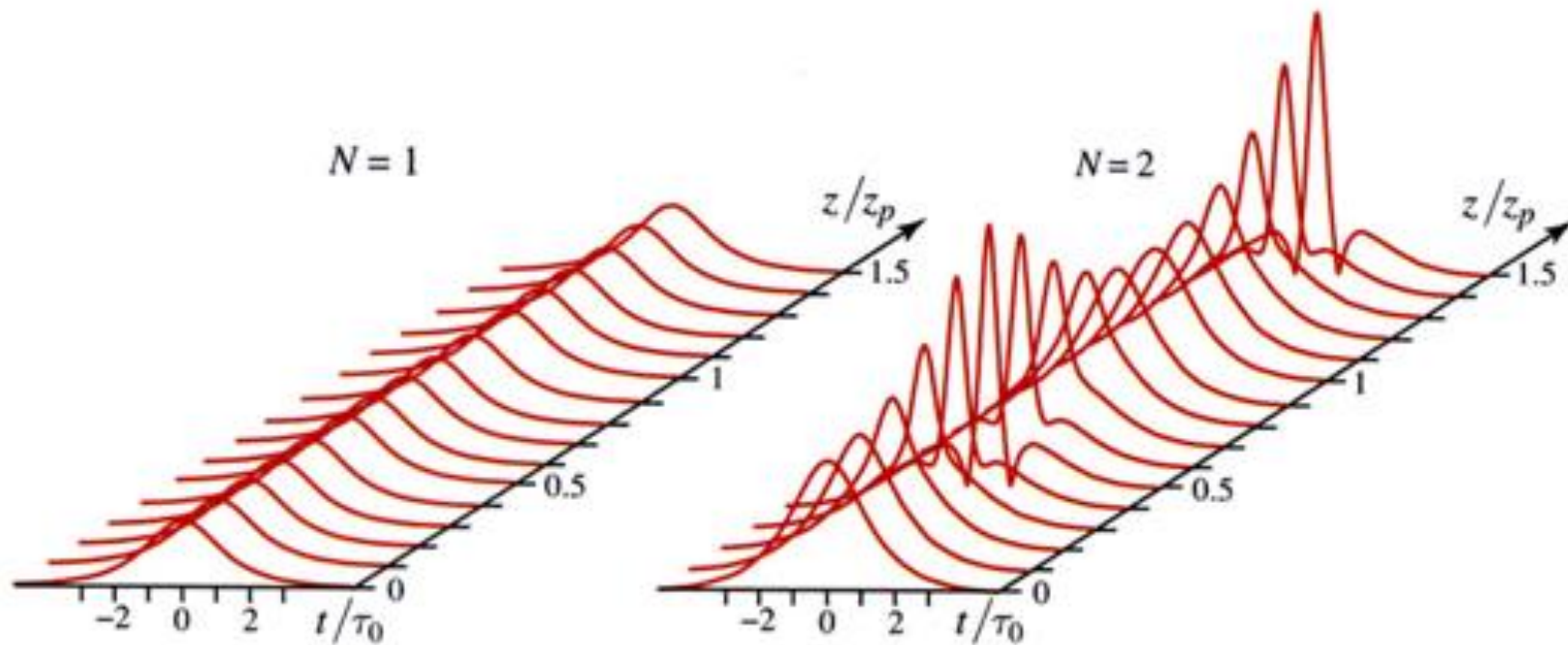
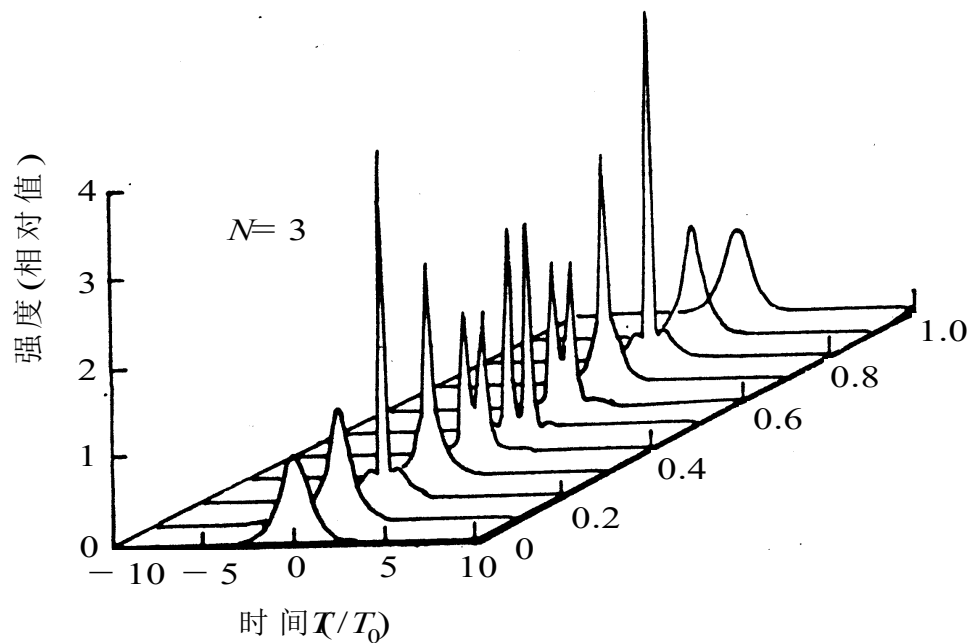


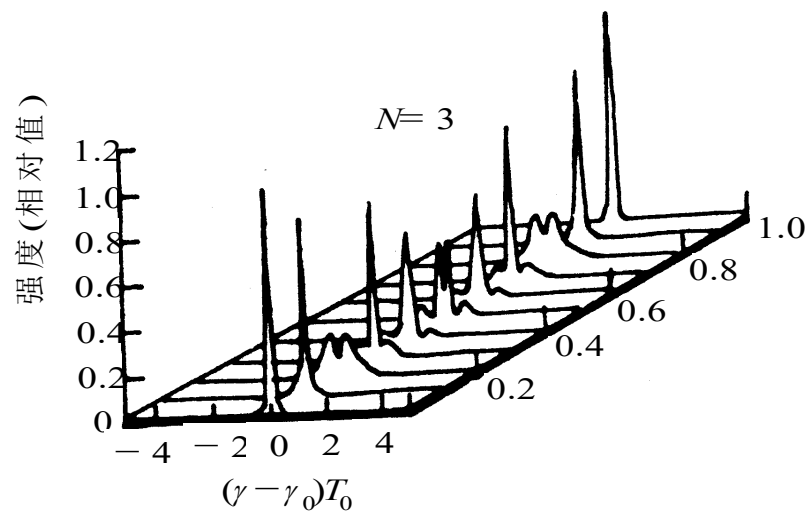
图6.3.3 一阶和二阶孤子的演化波形

z_p 是孤子的周期

图形演示



(a)



(b)

图 6.3.4 $N=3$ 孤子的变化

(a) 时域; (b) 频域

图形演示

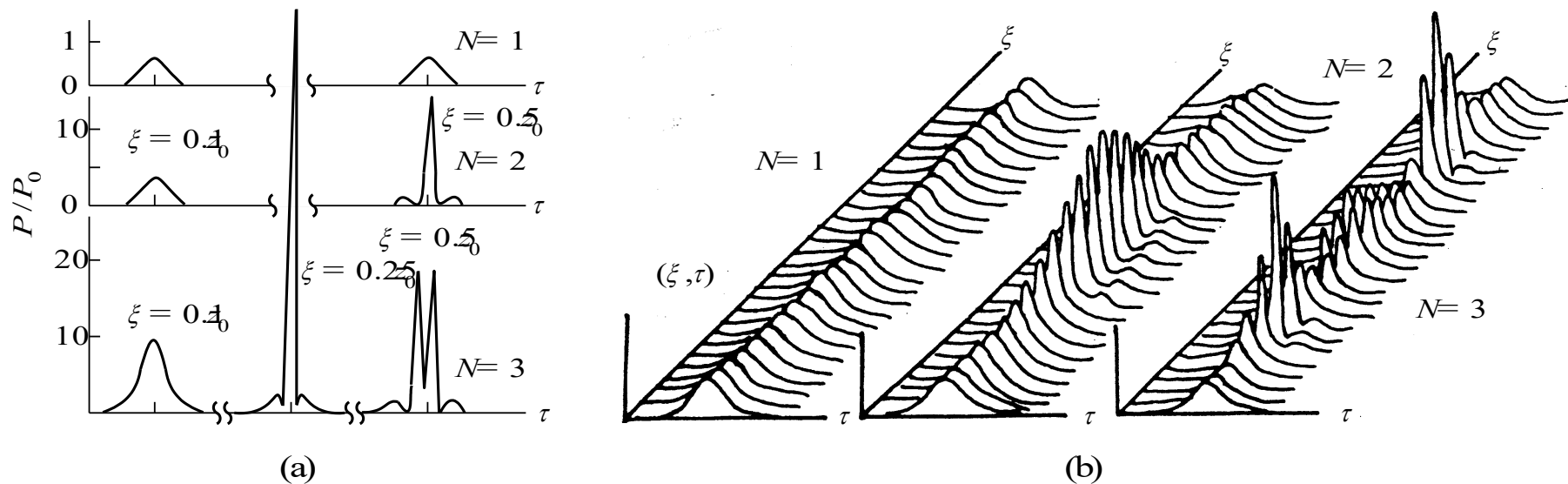


图 6.3.5 $N=1, 2, 3$ 孤子的波形变化

注： 随时间 t 沿 z 传播以速度 v_g 时， τ 变量可保持不变：

$$\tau = (t - z/v_g) / \sqrt{-k_0''}$$

在前面的图中，每一个给定的 τ ，不同 z 对应不同时间 t

由图6.3.2-6.3.5可知

- 对于 $N=1$ 的基本孤子，以 $P^\infty/|u(\tau, \xi)|^2$ 描述的波形在运动过程中不随位置 $\xi \propto z$ 而变，保持波形稳定；而 $N \geq 2$ 的高阶孤子其波形随位置 ξ 而周期性地变化。
- 对于 $N=2$ 的二阶孤子，其波形以 $\xi_0 = \pi/2$ 为周期，发生周期性的波形变化。在半周期 $\xi = \xi_0/2$ 处，脉冲变得最窄，且在孤子主峰的两侧，各出现有一个小峰。(由式(6.3.9)知，二阶孤子 $|u(\tau, \xi)|^2$ 的周期由 $4\xi = 2\pi$ 得 $\xi = \xi_0 = \pi/2$)。
- 对于 $N=3$ 的三阶孤子，其波形在传播中变化更复杂。它在 $1/4$ 与 $3/8$ 周期处，脉冲变得最窄，且两侧各有一个小峰的高大尖峰，在半周期处那个高大尖峰又分裂为两个峰(可看作是两个子脉冲)。

物理解释

$$u(\tau, \xi = 0) = A \operatorname{sech}(\tau)$$

不会无限压缩，拍频会存在
相干 $\lambda/2$ ，存在拍频

• 当输入光脉冲的幅度 $A=N$ 超过 $N=1$ 的基本孤子幅度时，在传输中非线性压缩超过色散，光脉冲会进一步压缩，形成 $N \geq 2$ 的高阶孤子。高阶孤子在传播中波形发生周期变化。周期性地变化的原因是，当多个孤子以相同速度传输时，伴随有孤子间的相位干涉，叠加后脉冲形状具有振荡特性，振荡周期由最低阶拍频决定。

• N 阶孤子相当于 $\xi=z=0$ 时 N 个孤子在一起，在运动中各个孤子之间由于叠加干涉作用，彼此之间的距离周期性地分离和靠拢。

注意：非线性跟光强成正比

一些补充讨论

1) 在图6.3.2-5中, 各个坐标轴上的坐标是相对比值。若用 Z_0 表示实际有长度单位的孤子周期, 则有

$$Z_0 = \xi_0 L_D = \pi L_D / 2 \quad (6.3.10)$$

其中 L_D 是后面将要讨论的色散长度, 即脉冲波包传播 L_D 距离时, 因色散导致的展宽不可忽略。

2) 设 B_c 在表示任一常数, 则非线性Schrödinger方程(6.2.13)在如下变换下形式不变(标度不变性):

$$\left. \begin{aligned} u'(\tau', \xi') &= B_c u(\tau, \xi) \\ \tau' &= B_c^{-1} \tau, \quad \xi' = B_c^{-2} \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{i \frac{\partial u'}{\partial \xi'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau'^2} + |u'|^2 u' = 0}$$

上述不变性意味着，若 $u(\xi, \tau)$ 是非线性Schrödinger方程(6.2.13)的一个解，则 $u'(\xi', \tau')$ 也是它的一个解。

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \Leftrightarrow i \frac{\partial u'}{\partial \xi'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau'^2} + |u'|^2 u' = 0$$

例如，既然由 $A=N=1$ 时的初始条件(6.3.7)，可给出一阶孤子解(6.3.8)，即

$$u(\tau, \xi = 0) = \operatorname{sech}(\tau) \quad (6.3.7)$$

⇒

$$u(\tau, \xi) = \operatorname{sech}(\tau) \exp(i \xi / 2) \quad (6.3.8)$$

即

$$u(\tau, \xi = 0) = \operatorname{sech}(\tau), \quad u(\tau, \xi) = \operatorname{sech}(\tau) \exp(i \xi / 2)$$

$$\tau' = B_c^{-1} \tau, \quad \xi' = B_c^{-2} \xi, \quad u'(\tau', \xi') = B_c u(\tau, \xi)$$

也可由初始条件

$$u'(\tau', \xi' = 0) = B_c \operatorname{sech}(\tau) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau') \quad (6.3.11)$$

给出另一个解（仍然是基本孤子）

可开, 可开. 分维, 可开.

$$\begin{aligned} u'(\tau', \xi') &= B_c u(\tau, \xi) = B_c \operatorname{sech}(\tau) \exp(i \xi / 2) \\ &= B_c \operatorname{sech}(B_c \tau') \exp(i B_c^2 \xi' / 2) \quad (6.3.12) \end{aligned}$$

改写成不带撇的符号表达

$$u(\tau, \xi) = \operatorname{sech}(\tau) \exp(i \xi / 2)$$

$$u(\tau, \xi) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau) \exp(i B_c^2 \xi / 2) \quad (6.3.12)$$

注：以上仍然是基本孤子。如果(6.3.11)按如下方式改动

$$u'(\tau', \xi' = 0) = B_c \operatorname{sech}(\tau) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau') \rightarrow$$

$$u'(\tau', \xi' = 0) = B_c 2 \operatorname{sech}(\tau) = B_c 2 \operatorname{sech}(B_c \tau')$$

就给出 $N=2$ 的二阶孤子，相当于 $\xi=0$ 时两个孤子在一起

$$u(\tau, 0) = 2 \operatorname{sech}(\tau) \Rightarrow$$

$$u(\tau, \xi) = \frac{4[\cosh(3\tau) + 3 \exp(i4\xi) \cosh(\tau)]}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\xi)} \exp(i\xi/2)$$

$$\tau = B_c \tau', \quad \xi = B_c^2 \xi', \quad u'(\tau', \xi') = B_c u(\tau, \xi) \Rightarrow$$

$$u'(\tau', \xi') = B_c \frac{4[\cosh(3B_c \tau') + 3 \exp(i4B_c^2 \xi') \cosh(B_c \tau')]}{\cosh(4B_c \tau') + 4 \cosh(2B_c \tau') + 3 \cos(4B_c^2 \xi')} \exp(i B_c^2 \xi' / 2)$$

3) 当入射脉冲的 A 不是正整数 N , 而是如下形式的波幅度时:

$$u(\tau, \xi=0) = A \operatorname{sech}(\tau)$$

$$A = N + \alpha, \quad |\alpha| < 1/2 \quad (6.3.13)$$

非线性Schrödinger方程(6.2.13)的解将包括孤子部分和非孤子部分, 但是当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 该解趋于孤子解, 非孤子部分很小, 所占比例为

非孤子部分在传播过程中更容易衰减掉

$$\alpha^2 / (N + \alpha)^2$$

按本上的可行性

因此, $N \gg 1$ 时, (6.2.13)的渐近解($\xi \rightarrow \infty$)可以用孤子解很好地描述。

2. 光纤中孤子形成与保持的条件

负色散.

从前面我们知道，光纤中孤子的形成，是光纤的群速度色散（GVD）和非线性作用中的自相位调制（SPM）两种作用达到平衡的结果。下面利用描述这两种效应的参数，即色散长度 L_D 与非线性长度 L_{NL} ，来分析光孤子形成的条件。脉冲在光纤中的传播距离 $z=L_D$ 时，GVD对脉冲的展宽作用不可忽略；传播距离 $z=L_{NL}$ 时，SPM对脉冲的压缩作用不可忽略。不难想到，当 $L_D=L_{NL}$ 时，GVD与SPM两种作用相互平衡，从而形成孤子。

1) 色散长度

考虑脉冲在单模光纤中传播一段距离 L ，频率为 ω 的光谱分量传播距离 L 产生的时间延迟为 $T = L/v_g$ 。群速度 v_g 与频率 ω 的相关性让不同频率成分的时间延迟 T 不同，导致光脉冲因群速色散而展宽。设光脉冲的频域谱宽为 $\Delta\omega$ ，则光脉冲传播距离 L 产生的时域展宽为 (注意： $1/v_g = dk/d\omega$)

$$dT = \frac{dT}{d\omega} d\omega \sim \Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta\omega = \left(\frac{d}{d\omega} \frac{L}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2k}{d\omega^2} \Delta\omega \quad (6.3.14)$$

其中 $d^2k/d\omega^2 \propto dv_g/d\omega$ 描述了群速度色散。当 $\Delta T = 1/\Delta\omega$ 时，脉冲的色散展宽 ΔT 与脉冲的时域宽度 $T_0 \sim 1/\Delta\omega$ 可以相比拟，此时色散带来的影响不可忽略，定义此时的距离长度 L 为色散长度 L_D ，即

$$\text{let } \Delta T = L \frac{d^2k}{d\omega^2} \Delta\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \Rightarrow L = L_D$$

$$\Delta T = 1/\Delta\omega = L_D \left| \partial^2 k / \partial \omega^2 \right| \Delta\omega \Rightarrow$$

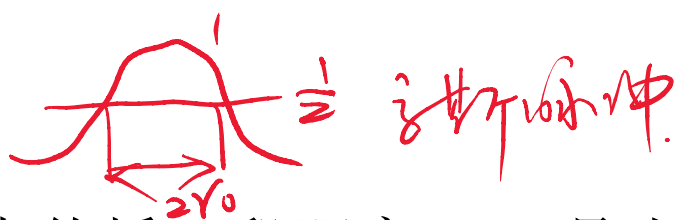
$$L_D \left| \partial^2 k / \partial \omega^2 \right| (\Delta\omega)^2 = 1, \text{ let } T_0 \equiv 1/\Delta\omega \Rightarrow$$

$$L_D = \frac{T_0^2}{\left| \partial^2 k / \partial \omega^2 \right|} = \frac{T_0^2 v_g^2}{\left| \partial v_g / \partial \omega \right|} \quad (6.3.15)$$

其中为保证正定性，已经对 $d^2k/d\omega^2$ 取绝对值。 T_0 也可以直接定义为脉冲强度降到 $1/e$ 倍处的脉冲半宽度(时域宽度)。因此，衡量光纤色散作用强弱的色散长度 L_D 含义是：当脉冲在光纤中传播距离 $z=L_D$ 时，群速色散作用对脉冲的展宽作用开始变得不可忽略。

L_D 越小，色散越强

2) 非线性长度



设频率为 ω 的光脉冲在光纤中传播一段距离 L ， P 是光脉冲的功率， $S_e = \pi r_0^2$ 是光纤的有效面积(r_0 是光纤的模场半径)，则光脉冲的光强为 $I = |E|^2 = P/S_e$ ，对它取时间平均，有 $I = |E_0|^2/2 = P_0/(2S_e)$ ， P_0 为光脉冲的峰值功率。由于非线性克尔(Kerr)效应，传播常数为

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \left(n_0 + \frac{\eta |E_0|^2}{2} \right) = \frac{\omega n_0}{c} + \frac{\omega \eta P_0}{2c S_e} \quad (6.3.16)$$

故非线性导致的传播常数变化为 $\Delta k = \frac{\omega \eta P_0}{2c S_e}$ ，传播距离 L 时，因非线性引起的额外相位变化 $\Delta \varphi$ 为

$$\Delta \varphi = \Delta k L = \frac{\omega \eta P_0 L}{2c S_e} \quad (6.3.17)$$

因非线性引起的相位变化 $\Delta\varphi = \Delta kL = \frac{1}{2}$ 时，对应的距离 $L = L_{\text{NL}}$ 定义为非线性长度，即

$$\Delta\varphi = \Delta kL = \omega\eta P_0 L / 2cS_e = 1/2 \Rightarrow$$
$$L = L_{\text{NL}} = cS_e / \omega\eta P_0 \quad (6.3.18)$$

非线性长度 L_{NL} 表示当光脉冲传播距离为 $L = L_{\text{NL}}$ 时，非线性效应对脉冲产生的压缩不可忽略。

3) 色散长度与非线性长度统一定义

设 ω_0 是脉冲中心频率，令 $\Delta k = k(\omega) - k(\omega_0)$ 和 $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ，由前面(6.2.8)得到 (即 $k(\omega, P)$ 在 $(\omega_0, 0)$ 处的泰勒级数展开)

$$\Delta k = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\Delta\omega)^2 + \frac{\eta\omega_0}{2cS_e} P_0$$

$\Delta k = \Delta k_0 + \Delta k_D + \Delta k_{NL}$ (6.3.19)

色散项 *非线性项*

上式右边第二项是色散带来的波数变化(记为 Δk_D)，第三项是非线性带来的波数变化(记为 Δk_{NL})，光脉冲在光纤中传播一段距离 L 时，因色散和因非线性引起的相位变化分别为(注意反常色散下 $d^2k/d\omega^2 < 0$)

负色散介质

$$(6.3.20) \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi_D = \Delta k_D L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 L, \text{ let } \Delta\varphi_D = -\frac{1}{2} \Rightarrow L_D = -\frac{1}{2\Delta k_D} \\ \Delta\varphi_{NL} = \Delta k_{NL} L = \frac{1}{2} \frac{\eta\omega_0}{cS_e} P_0 L, \text{ let } \Delta\varphi_{NL} = \frac{1}{2} \Rightarrow L_{NL} = \frac{1}{2\Delta k_{NL}} \end{array} \right.$$

结合(6.3.15)、(6.3.18)和(6.3.20)可知，色散长度 L_D 与非线性长度 L_{NL} 可以统一地定义如下：假设光脉冲在光纤中传播一段距离 L ，则因色散引起的相位变化 $\Delta\varphi_D = -1/2$ 时所对应的距离 $L=L_D$ 定义为色散长度（ $d^2k/d\omega^2 < 0$ ）；因非线性引起的相位变化 $\Delta\varphi_{NL} = 1/2$ 时所对应的距离 $L=L_{NL}$ 定义为非线性长度。

显然，光脉冲在光纤中传播一段距离 L 时，总的相位变化为

$$\Delta kL = \Delta k_0 L + \Delta k_D L + \Delta k_{NL} L = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_D + \Delta\varphi_{NL}$$

4) 光孤子的形成条件

$$\Delta k = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \Delta \omega + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\Delta \omega)^2 + \frac{\eta \omega_0}{2c S_e} P_0 = \Delta k_0 + \Delta k_D + \Delta k_{NL}$$

$$\Delta k L = \Delta k_0 L + \Delta k_D L + \Delta k_{NL} L = \Delta \varphi_0 + \Delta \varphi_D + \Delta \varphi_{NL}$$

当光脉冲在光纤中传播一段距离 L 时，如果因色散引起的相位变化 $\Delta \varphi_D$ 与因非线性引起的相位变化 $\Delta \varphi_{NL}$ 满足 $\Delta \varphi_D + \Delta \varphi_{NL} = 0$ ，则两种效应抵消，从而色散对脉冲的展宽效应与非线性对脉冲的压缩效应抵消，使得脉冲在传播中保持形状不变，从而形成孤子。由(6.3.20)可知，形成孤子的条件，可以等价地表述为色散长度 L_D 等于非线性长度 L_{NL} ： $L_D = L_{NL}$ (即 $\Delta k_D = \Delta k_{NL}$)

$$(6.3.20) \rightarrow \Delta k_D = -1/2L_D, \quad \Delta k_{NL} = 1/2L_{NL}$$

显然，当 $L_D \gg L_{NL}$ 时， $|\Delta k_D| \ll \Delta k_{NL}$ ，光脉冲在光纤中传播一段距离 L 时， $|\Delta \varphi_D| = |\Delta k_D L| \ll \Delta \varphi_{NL} = \Delta k_{NL} L$ ，非线性效应强过色散效应，脉冲压缩大于展宽；当 $L_D \ll L_{NL}$ 时，情况相反。

非线性长度 L_{NL} 越长，非线性效应越强 (待求证)

5) 形成光孤子的阈值功率

为了保持孤子传输，色散对脉冲的展宽作用与非线性对脉冲的压缩作用需要平衡，这要求 $L_D=L_{NL}$ ，由此可求出形成基本孤子的最小光功率 ($\lambda=2\pi c/\omega_0$ 是真空中波长)

$$L_{NL} = \frac{cS_e}{\eta\omega_0 P_0} = L_D \Rightarrow (P_0)_{\min} = \frac{cS_e}{\eta\omega_0 L_D} = \frac{\lambda S_e}{2\pi\eta L_D} \quad (6.3.21)$$

若低于这个功率，非线性压缩效应不足以抵消色散展宽效应。 N 倍振幅的 N 阶孤子功率，为基本孤子功率的 N^2 倍(此时非线性压缩效应大于色散展宽效应，孤子形状周期性变化)。实际孤子在传输中存在能量衰减，当能量衰减使得功率降到阈值以下时，光纤不再具有足够的非线性，孤子形成条件破坏，需要对脉冲补充能量，可让孤子恢复原来形状。

有非线性
→

6) 孤子的 面积不变性

$$E(r, z, t) = R(r)E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]$$

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0 \quad (\xi \propto z, \tau \propto (t - z/v_g), u \propto E_0)$$

(6.2.13)

类似脉冲面积
的定义，孤子
的面积定义为

$$A_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| d\tau \quad (6.3.22)$$

对于 非线性 Schrödinger 方程 (6.2.13)，前面已论证可由初始条件

$$u(\tau, \xi = 0) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau) \quad (6.3.11)$$

给出解

守恒不变性

$$u(\tau, \xi) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau) \exp(i B_c^2 \xi / 2) \quad (6.3.12)$$

因此有

$$|u(\tau, 0)| = |u(\tau, \xi)| = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau) \quad (6.3.23)$$

代入(6.3.22)，得孤子的面积为 $A_s(\tau, 0) = A_s(\tau, \xi) = 1$ 。因此孤子
在无损耗的光纤中传播时，脉冲面积保持不变。设 A 是孤子
的振幅， T_0 是孤子宽度，按如下方式定义：

$$|u(\tau, \xi)| = A \operatorname{sech}(\tau/T_0) = B_c \operatorname{sech}(B_c \tau) \quad (6.3.24)$$

于是孤子的面积为 $A_s(\tau, \xi) = 1 = AT_0$ ，即孤子的面积为振幅与
脉宽的乘积。

6.4 光纤中孤子脉冲的相互作用

在光纤孤子通信中，在光纤中传输的是高密度的孤子串，而不是单个的孤子。相邻孤子间的间距越小，通信系统的码率越大。但是孤子间的间距小到一定程度时，非线性效应使得相邻孤子之间发生相互作用，导致波形畸变，信息的传输速率下降，传输特性恶化，传输距离缩短。因此研究光孤子之间的相互作用机制，以及由此研究如何减少这种相互作用，是非常重要的课题。

设在 $\xi=0$ 处输入的光纤信号，是由间距为 Δ_0 的孤子对组成

$$u(\tau, 0) = a_1 \operatorname{sech}[a_1(\tau - \Delta_0/2)] \exp(i\varphi_1) \\ + a_2 \operatorname{sech}[a_2(\tau + \Delta_0/2)] \exp(i\varphi_2) \quad (6.4.1)$$

我们将讨论以下三种情形

1. 同相等幅两脉冲注入($\varphi_1=\varphi_2, a_1=a_2$)
2. 异相等幅两脉冲注入($\varphi_1\neq\varphi_2, a_1=a_2$)
3. 同相不等幅两脉冲注入($\varphi_1=\varphi_2, a_1\neq a_2$)

1.同相等幅两脉冲注入(不妨取 $\varphi_1=\varphi_2=0, a_1=a_2=1$)

$$u(\tau, 0) = \operatorname{sech}\left(\tau - \frac{\Delta_0}{2}\right) + \operatorname{sech}\left(\tau + \frac{\Delta_0}{2}\right) \quad (6.4.2)$$

用逆散射方法，再结合物理上的考虑，由以上初始条件可得其近似解。当孤子之间的初始间距 $\Delta_0 \gg 1$ 时，孤子在光纤内传播距离 ξ 处，两孤子之间的间隔 Δ 由下式给出

$$2 \exp(\Delta - \Delta_0) = 1 + \cos[4\xi \exp(-\Delta_0/2)] \quad (6.4.3)$$

上式表明，两孤子之间的间隔 Δ 沿光纤传播位置 ξ 周期性地变化，其周期由 $4\xi \exp(-\Delta_0/2) = 2\pi$ 得

$$\xi_p = \frac{\pi}{2} \exp(\Delta_0/2) \quad (6.4.4)$$

如果不取 $\Delta_0 \gg 1$ 近似，一般情形下，两孤子间隔 Δ 随位置 ξ 的变化周期为

$$\xi_p = \frac{\pi \sinh \Delta_0 \cosh(\Delta_0/2)}{\Delta_0 + \sinh \Delta_0} \quad (6.4.5) \quad \left(\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

两孤子间隔 Δ 随位置 ξ 周期性地变化，表明两孤子之间存在周期性的作用力。当两孤子间距很小时，彼此之间有吸引力，使它们相互靠拢，直至相互碰撞而合并在一起，然后又相互排斥远离，达到一定间距后又开始相互吸引，直至再次发生碰撞，如此周而复始。光纤通信中，不希望相邻孤子发生周期性离合现象，一种避免方法是增加输入孤子串之间的初始间距 Δ_0 ，使得孤子之间相互作用可以忽略。

由于孤子的波形变化周期为 $\xi_0=\pi/2$ ，故在 $\Delta_0 \gg 1$ 近似下，由(6.4.4)有 $\xi_p/\xi_0=\exp(\Delta_0/2)$ ，把无量纲的空间位置变量 ξ 换成实际的空间位置 z ，则实际的孤子间距变化周期 z_p 与孤子波形变化周期 z_0 满足关系 $z_p/z_0=\xi_p/\xi_0=\exp(\Delta_0/2)$ ，即有

$$z_p = z_0 \exp(\Delta_0/2)$$

例如，取 $\Delta_0=20$ ， $z_0=10\text{km}$ ，则 $z_p=220000\text{km}$ ，这对大多数通信系统是满足的（即光孤子还没有来得及靠拢，通信传输已经结束了）。

注： $\Delta_0=0$ 时，(6.4.2)成为 $N=2$ 的高阶孤子初始条件，此时它在传播过程中，位置变化周期 ξ_p 等于波形变化周期 ξ_0

$$u(\tau, 0) = \text{sech}(\tau - \Delta_0/2) + \text{sech}(\tau + \Delta_0/2) \xrightarrow{\Delta_0=0}$$

$$u(\tau, 0) = 2 \text{sech}(\tau), \quad \xi_p = (\pi/2) \exp(\Delta_0/2) = \pi/2 = \xi_0$$

2. 异相等幅两脉冲注入($\varphi_1=\varphi_0, \varphi_2=0, a_1=a_2=1$)

$$u(\tau, 0) = \operatorname{sech}\left(\tau - \frac{\Delta_0}{2}\right) \exp(i\varphi_0) + \operatorname{sech}\left(\tau + \frac{\Delta_0}{2}\right) \quad (6.4.6)$$

此时两孤子之间的间距随传播距离 ξ 而变化的周期为

$$\xi_p = \frac{\pi \sinh \Delta_0 \cosh(\Delta_0/2)}{(\Delta_0 \cos \varphi_0 + \sinh \Delta_0) \cos(\varphi_0/2)} \quad (6.4.7)$$

上式表明，两孤子间隔的变化周期 ξ_p 除了随初始间距 Δ_0 增大而增大，还随初始相位差 φ_0 在 $0\sim\pi$ 之间增加而增加($\cos(\varphi_0/2)=1\rightarrow 0$)，从而与同相等幅的情形1相比，这里的周期 ξ_p 明显增加。

3. 同相不等幅两脉冲注入 ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0, a_1 = a_0, a_2 = 1$)

$$u(\tau, 0) = a_0 \operatorname{sech}\left[a_0\left(\tau - \frac{\Delta_0}{2}\right)\right] + \operatorname{sech}\left(\tau + \frac{\Delta_0}{2}\right) \quad (6.4.8)$$

当 $a_0 = 1$ 时成为情形1；当 $a_0 > 1$ 时，两孤子间隔的变化周期 ξ_p 并非随初始间距 Δ_0 增大而增大，而是趋于一个稳定值，即

$$\xi_p = \frac{4\pi}{a_0^2 - 1} \quad (6.4.9)$$

只适用于 $a_0 > 1$ 且可以选 $a_0 \rightarrow 1$!

没有矛盾的